Exercice 1 On considère l'équation différentielle

$$(E)\ xy'(x) + (1 + x^2)\, y(x) = x.$$

Partie I : étude sur $]0, +\infty[$

1. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note f_m la solution de (E) sur $]0, +\infty[$ telle que $f_m(1) = 1 + \dfrac{m}{\sqrt{e}}$.
   Déterminer f_m
2. (a) Calculer, sans dériver la fonction f_m, la valeur de $f'_m(1)$
   (b) Donner l'équation de la tangente T_m à $\mathcal{C}_{f_m}$ en $x = 1$
   (c) Montrer que toutes les droites T_m, lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point A que l'on précisera.
   (d) Déterminer la solution g de (E) passant par le point A.
   (e) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle la tangente en A au graphe de g est confondue avec T_m.
3. (a) Déterminer le lieu $\mathcal{H}$ des points en lesquels les courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ possède une tangente horizontale.
   (b) Déterminer le lieu $\mathcal{D}$ des points en lesquels les courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ possède une tangente parallèle à la droite $y = x$.
4. Avec un logiciel (par exemple `Maple` ou `Scilab` ou `www.desmos.com`), tracer simultanément les graphes de f_{m_0}, g et T_{m_0}. Sur un autre schéma, toujours à l'aide du logiciel, tracer les lieux $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ accompagnés de quelques courbes intégrales $\mathcal{C}_{f_m}$.

Partie II : étude sur $\mathbb{R}$

1. On pose $h(x) = \dfrac{1 - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$.
   (a) Déterminer le développement limité d'ordre 3 en $x = 0$ de de $h(x)$.
   (b) Montrer que l'on peut prolonger h en $x = 0$ en une fonction continue et dérivable.
   Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_h$ par rapport à sa tangente en ce point.
2. Montrer que h est l'unique solution sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Exercice 2 On se propose de résoudre, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle linéaire du second ordre **à <u>coefficients non constants</u>** suivante :

$$\boxed{(E)\ \text{«}\ x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\ \text{»}}.$$

Deux méthodes vous sont proposées.

***** 1$^{\text{ère}}$ méthode *(changement de fonction)* *****

1. (a) Montrer que l'équation homogène associée
   $$\boxed{(EH)\ \text{«}\ x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0\ \text{»}}$$
   possède une solution sous la forme $y(x) = x^a$, où a est une constante que l'on déterminera.
   (b) On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f(x) = x^a g(x)$.
   Montrer que f est solution de (E) <u>si, et seulement si</u> g' (dérivée de g) est solution de l'équation différentielle (F) suivante :
   $$\boxed{(F)\ \text{«}\ xy'(x) + y(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{x}\right)\ \text{»}}.$$
   (c) Résoudre l'équation (F) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

(d) Conclure.

***** 2$^{\text{nde}}$ méthode *(changement de variable)* *****

2. Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in]0,+\infty[$, $y(x) = z(\ln x)$, autrement dit $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) sur $I =]0,+\infty[$ si, et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (G) suivante
   $$\boxed{(G) \text{ « } z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \text{ch}(t) \text{ »}}.$$
   (b) Résoudre cette équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Conclure.
3. (a) Déterminer un équivalent simple en $x = 0$ de chaque solution $f(x)$ de l'équation (E) sur $]0,+\infty[$. Ces solutions peuvent-elles se prolonger en une fonction continue en 0 ?
   (b) Montrer que toutes les solutions de (E) possède une droite asymptote commune au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 ENTRAÎNEMENT PERSONNEL

Déterminer les solutions $y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$ de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = t + 1 + e^t$
2. $y'' - 4y' + 3y = \text{sh}(3t)$
3. $y'' - 2y' + 5y = te^t$
4. $y'' + 4y' + 4y = \sin^2(t)$
5. $y'' + 3y = e^{-t}\cos(2t)$
6. $y'' + 4y' + 13y = t^2e^{-t}$
7. $2y'' + 2y' + y = 4\sin(t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
8. $y'' + y = e^{-|t|}$

♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡

Solutions de l'exercice **3** :

$$y_1(t) = t + \frac{1}{3}e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ y_2(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{48}e^{-3t}$$

$$y_3(t) = e^t\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) + \frac{1}{4}te^t,\ y_4(t) = Ate^{-2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin(2t)$$

$$y_5(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\sin(2t) + A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$y_6(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{2}{50}t - \frac{3}{250}\right)e^{-t} + e^{-2t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right)$$

$$y_7(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{8}{5}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{16}{5}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{8}{5}\cos(t) - \frac{84}{5}\sin(t)$$

$$y_8(t) = \left\{ \begin{array}{lll} A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si} & t \geqslant 0 \\ A\cos(t) + (B-1)\sin(t) + \frac{1}{2}e^{t} & \text{si} & t < 0 \end{array} \right.$$