Exercice Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction g_n par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g_n(x) = nx + \ln(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation « $g_n(x) = 0$ » possède une et une seule solution x dans l'intervalle $]0,+\infty[$. On notera u_n cette unique racine.
2. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 3$: $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. (a) Simplifier, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ la quantité $g_{n+1}(x) - g_n(x)$.
   (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, le signe de $g_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite u.
   (c) Montrer que cette suite u converge. On note ℓ sa limite.
   (d) Montrer que supposer $\ell > 0$ aboutit à une contradiction. Conclusion ?
4. Lorsque $n \to +\infty$, prouver que $\ln(u_n)$ est équivalent à $\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   A-t-on u_n équivalent à $\dfrac{1}{n}$?

PROBLEME On considère deux suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_{n+1} = v_n u_n + w_n}.$$

On pose enfin $P_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} v_k.$$

Résolution de la récurrence homogène

Dans cette question uniquement, on suppose $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de P_n.
2. Donner une forme close (i.e sans symbole $\prod$) de u_n lorsque :
   (a) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n + 1$.
   (c) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Facteur de sommation

On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$z_n = \frac{u_n}{P_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Exprimer $z_{n+1} - z_n$ à l'aide de w_n.
2. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{P_{k+1}}\right) P_n.$$

3. Donner l'expression de u_n (si possible sous une forme close i.e sans symbole $\sum$ ni $\prod$) lorsque :
   (a) les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
   Quel résultat du cours retrouve-t-on ?
   (b) $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$ et $w_n = \dfrac{1}{(n+2)!}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Une première application

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

- pour tout $i \in [[1,n]]$, $M_n[i,i] = i+1$
- pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, si $i \neq j$ alors $M_n[i,j] = 1$.

On pose alors $\Delta_n = \det(M_n)$.

1. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$: $\Delta_{n+1} = (n+1)\Delta_n + n!$.
   Quelle valeur peut-on donner à Δ_0 afin que la formule précédente soit vérifiée pour $n = 0$?
2. Donner une expression de Δ_n.
3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   Montrer, pour tout $k > 0$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   En déduire un équivalent de H_n puis de Δ_n lorsque $n \to +\infty$.

Une seconde application

Dans cette question, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit $n \geqslant 1$ et $k \in [[1,n]]$. Montrer
$$\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1}.$$
2. <u>A n fixé</u> : montrer que la suite $\left(\gamma_k = \binom{n}{k}\right)_{k\in[[0,n]]}$ est croissante jusqu'au rang $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ puis décroissante.
3. En déduire, pour tout $n \geqslant 4$ et $k \in [[2, n-2]]$: $\dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{2}$.
4. Justifier, pour tout $n \geqslant 4$:
$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}.$$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,\quad 2(n+1)u_{n+1} = 2(n+1) + (n+2)u_n.$$
6. Donner l'expression de u_n en fonction de n et d'une somme finie, puis en déduire :
$$u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$
7. En déduire un équivalent de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.