Rappel : si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$. L'application $p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & p(\vec{x}) = \vec{x}_F \end{array} \right.$ s'appelle **projecteur sur F parallèlement à G** (ou sur F selon G) (ou de base F et de direction G).

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
On note B l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E.
2. On note S l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 9u_{n+1} - 4u_n$.
   Justifier que S est un plan vectoriel.
3. Montrer que $D = S \cap B$ est une droite vectorielle.
4. Avec $H = \{u \in E \mid u_0 = 0\}$: montrer que H et D sont des sous-espaces supplémentaires de E.
5. Soit t, suite constante égale à 3. Préciser $p(t)$ où p est le projecteur sur H parallèlement à D.

Exercice 2 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. On note D l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle «$y' - xy = 0$».
   Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E.
2. B est l'ensemble des fonctions bornées de E. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que les sous-espaces B et D sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Montrer que $H = \{f \in E \mid \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 0\}$ et D sont des sous-espaces supplémentaires de E.
5. On note p, le projecteur sur H parallèlement à D : déterminer $g = p(\exp)$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$.
On note : $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 4f(x) = 0\}$ et $G = \left\{ f \in E \mid \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) = 0 \right\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Préciser une famille génératrice de F.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit p, le projecteur sur F parallèlement à G : donner l'expression de $p(\cos)$.

Exercice 4 On considère les sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ F et G suivants :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}$.

1. (a) Donner une famille génératrice de F.
   (b) Donner une famille génératrice de G.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p(\overrightarrow{u})$ en fonction de x, y et z.

Exercice 5 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables et à valeurs réelles.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f \text{ est solution de l'équation différentielle } 4y'' - 4y' + 5y = 0\}$. Déterminer un système générateur de F.
2. Si a et b sont des réels, on définit l'ensemble $F_{a,b} = \{f \in E \mid f(a) = f(b) = 0\}$.
   Montrer que $F_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Dans cette question seulement : on prend $a = 0$ et $b = \pi$.
   $F_{a,b}$ et P sont-ils des sous-espaces supplémentaires de E ?
4. Dans cette question seulement : on prend $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer que $F_{a,b}$ et P sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 6 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2) = 0\}$.

1. Déterminer des familles génératrices de F et de G.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7 On rappelle : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid E_{2,2}M = 0\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid E_{1,1}M = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Identifier $E_{1,1} + E_{2,2}$. En déduire que F et G sont en somme directe.
3. Parmi les quatre matrices $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$, lesquelles sont dans F ? dans G ?
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E et F l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}$ dont la somme des termes de chaque ligne et chaque colonne est nulle. On note :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. (a) Soit M, une matrice dans $\mathcal{S}$: justifier que si la somme sur chaque ligne de M vaut 0 alors la somme sur chaque colonne également. En déduire, si $M \in \mathcal{S}$: $(M \in F) \iff (BM = 0)$.
   (b) Montrer que F est un sous-espace de E.
   (c) Montrer que si $(M, N) \in F^2$ et $MN = NM$ alors $MN \in F$.
3. (a) Montrer que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$: montrer que $M \in F$ se traduit par un système sur les coefficients (a, b, c, d, e, f).
   (c) Résoudre ce système et exprimant les solutions à l'aide de a, c et f, en déduire que la famille $B_1 = (E_1, E_2, E_3)$ est une base de F.
4. On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de E.
   (a) L'ensemble $GL_3(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
   (b) Montrer que $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \varnothing$.
5. Soit $M = ((a_{i,j})) \in E$, on définit $\mathrm{Tr}(M) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (la **trace** de la matrice M).
   (a) Montrer que $P = \{M \in F,\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un plan vectoriel de E.
   Montrer que la famille $B_2 = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est une base de P.
   (b) Soit $D = \mathrm{Vect}(2E_1 - E_2 + 2E_3)$, montrer que $D \oplus P = F$.
   (c) Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans la base B_2. Calculer M^2 et M^3, puis montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $M^{2n} \in D$ et $M^{2n+1} \in P$.