PROBLEME

PARTIE I

A. Etude d'une fonction f

Soit f, l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ f(x) = \dfrac{x}{\sin x} \end{cases}$

1. Etudier les variations de f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Prouver que f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

B. Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit g une application de classe C^1 sur $[0, 1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que, pour tout réel $x > 0$:
$$\left| \int_0^1 \sin(xt) g(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{A}{x}.$$
2. En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 \sin(xt) g(t) \mathrm{d}t$.

C. Limite d'une suite d'intégrales

Soit P, un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme φ l'application de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{P(x)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.
   (a) Exprimer φ à l'aide de la fonction f étudiée dans la partie précédente.
   (b) En déduire que φ possède un prolongement de classe C^1 sur $[0, 1]$ que l'on définira.
2. On note alors (abus d'écriture) : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi t\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 P(t) \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\pi t\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \mathrm{d}t$.
   Montrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 P(t) \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\pi t\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \mathrm{d}t = 0$.

PARTIE II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le polynôme $Q = h(P)$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x (t - x) P(t) \mathrm{d}t + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P(t) \mathrm{d}t.$$

A. Etude de h.

1. Montrer que h est un **endo**morphisme de E.
2. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.
   (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q'(x) = x \displaystyle\int_0^1 P(t) \mathrm{d}t - \int_0^x P(t) \mathrm{d}t$.
   (b) Calculer Q''.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(h)$, le noyau de h, est exactement l'ensemble des polynômes constants.
4. On définit G comme l'ensemble des polynômes Q de E tels que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$.
   (a) Justifier l'inclusion : $\mathrm{Im}(h) \subset G$.
   (b) Soit Q, un élément de G. Calculer $h(Q'')$. En déduire l'égalité $\mathrm{Im}(h) = G$.
5. $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

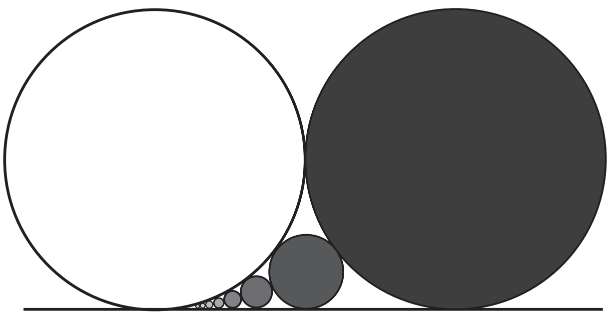
B. Etude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \\ \text{et} \\ \forall n \geqslant 2,\ P_n = h(P_{n-1}). \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$ pour $n \geqslant 2$?
3. Exprimer, en fonction de n, le monôme de plus haut degré de P_n.
4. Déduire, du **II.A.2**, la relation : pour tout $n \geqslant 2$, $P''_n = -P_{n-1} + \displaystyle\int_0^1 P_{n-1}(t)\mathrm{d}t$.
5. Etablir alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t$$
et
$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

PARTIE III

1. Etablir, pour tout N entier naturel non nul :
$$\forall t \in]0,\pi], \quad \sum_{k=1}^{N}\cos(kt) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls :
$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\pi t\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t.$$
3. Notation : si $u = (u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite donnée et si la suite $S = (S_N)_{N\geqslant 1}$, définie par la somme $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k$, converge, alors on dit que **la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge**, et on note sa limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k := \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k\right)$ (appelée *somme de la série* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$).
Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{2n}} \text{ converge et } \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t}.$$
4. Application : montrer que les sommes des séries $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\dfrac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.
5. Complément : que dire de la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{2n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$?



CADEAU : on considère le dessin ci-dessus. Quelle est l'aire totale de tous les disques grisés, en fonction de l'aire des grands disques ? Indication : on utilisera un résultat de la partie III du problème...