PROBLEME

On réalise l'expérience aléatoire suivante : une boîte A contient initialement deux jetons, portant chacun le nombre 0, et une boîte B contient deux jetons portant chacun le nombre 1. On choisit, au hasard et simultanément, un jeton de A et un jeton de B. On place alors :

– dans B, le jeton de A choisi
– dans A, le jeton de B choisi

puis, on recommence. On bout de n échanges de ce type, on appelle S_n la somme des deux nombres des jetons de la boîte A, et

• $u_n =$ « la probabilité que S_n soit égale à 0 »
• $v_n =$ « la probabilité que S_n soit égale à 1 »
• $w_n =$ « la probabilité que S_n soit égale à 2 ».

Il est clair que $S_0 = 0$, et que, par conséquent

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad w_0 = 0.$$

Question préliminaire :

• rappeler la **formule des probabilités totales** (hypothèses comprises).
• justifier que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcccccc} u_{n+1} & = & & & (1/4)v_n & & \\ v_{n+1} & = & u_n & + & (1/2)v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & & & (1/4)v_n & & \end{array} \right. .$$

Donc, tout naturellement, on définit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$, matrice qu'on se propose d'étudier ici.

1. Que vaut le rang de la matrice M ? On attend ici une explication précise ou un calcul détaillé. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.
2. On appelle f, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.
   (a) Que vaut $f(x, y, z)$?
   (b) Préciser une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils des sous-espaces supplémentaires de E ?
3. On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $P(\lambda) = \mathrm{dét}(M - \lambda.I)$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que P est un polynôme de degré trois : en déterminer les racines. En particulier, vérifier qu'elles sont toutes simples et réelles : on les note λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. On dit que λ_1, λ_2 et λ_3 sont les *valeurs propres de la matrice* M.
   (b) On admet (ce sera vu en seconde année) que $\det(M) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ et $\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (où $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{3} M[i,i]$ désigne la trace de la matrice M, somme des termes de la diagonale de M). Utiliser ces renseignements afin de vérifier la cohérence des valeurs des λ_k.
4. Pour chaque valeur de $k \in \{1, 2, 3\}$, on définit le sous-espace $E_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id})$, où id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
   Le sous-espace $E_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id})$ s'appelle « *le sous-espace propre de la matrice M associé à la valeur propre* λ_k ».

(a) Justifier <u>sans calcul</u> que, pour $k \in \{1,2,3\}$, E_k n'est pas réduit au vecteur nul $\vec{0}$ de $E = \mathbb{R}^3$.

(b) Pour chaque $k \in \{1,2,3\}$, montrer que E_k est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur $\vec{v}_k$.

(c) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de $E = \mathbb{R}^3$, de la forme [1]

$$\vec{a} = (1, *, *), \quad \vec{b} = (1, *, *) \quad \text{et} \quad \vec{c} = (1, *, *)$$

sur laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et Q, la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

   (a) Expliciter Q et Q^{-1}. On factorisera la matrice Q^{-1} sous la forme $Q^{-1} = \frac{1}{6}(...)$.

   (b) Ecrire une formule reliant les matrices D, M, Q et Q^{-1}.

   (c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, que vaut D^n ?

   (d) En déduire une expression explicite de M^n, pour tout entier $n \geqslant 0$.

6. <u>Retour à l'étude des suites u, v et w</u> :

   (a) En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, quelle relation existe-t-il entre X_{n+1} et X_n ? Entre X_n et X_0 ?

   (b) En déduire, à l'aide l'étude de la matrice M, une expression, pour tout entier $n \geqslant 0$, des termes u_n, v_n et w_n.

   (c) <u>Vérification</u> : il est clair que S_1 (somme des numéros des jetons de la boite A à la première étape) vaut 1. Que valent donc u_1, v_1 et w_1 ?
   Vérifier ces résultats à l'aide des formules trouvées en **6b**.

   (d) Préciser les valeurs des limites des trois suites u, v et w.
   Elles constituent *la loi limite de la variable aléatoire S_n*.

1. Petite aide : les valeurs des $*$ appartiennent à l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 4\}$.