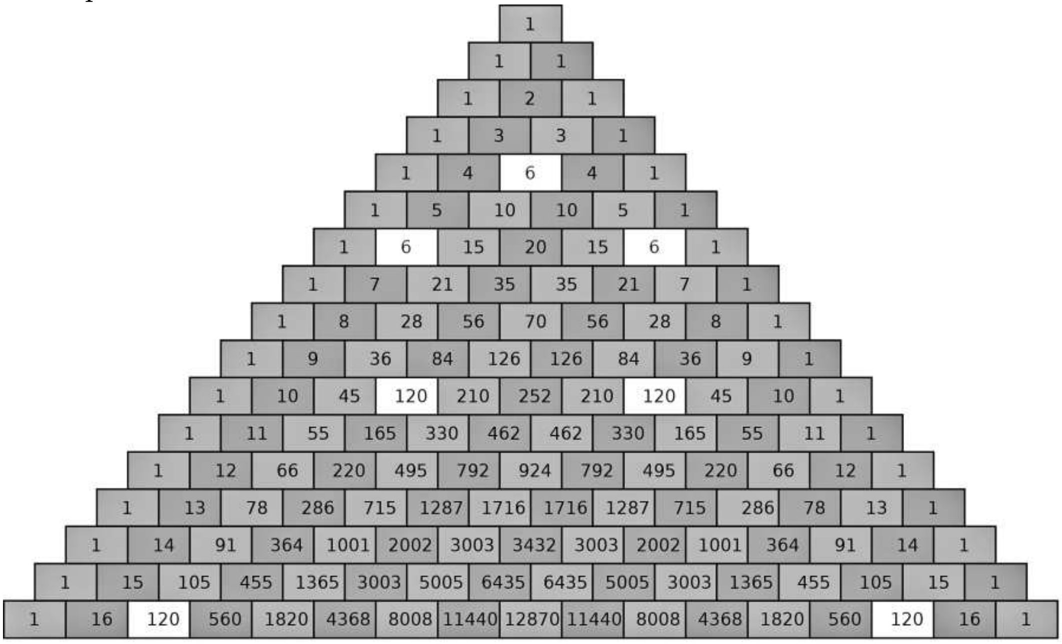
Exercice 1 Autour de la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci, notée $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par
$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Quelques propriétés immédiates
   (a) Montrer par récurrence double la propriété suivante :
   $$\forall n \geqslant 5, \quad F_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad F_n \geqslant n.$$
   A-t-on $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout entier n ?
   (b) Préciser la monotonie de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A partir de quel rang est-elle strictement croissante ?
   (c) Montrer par récurrence simple l'identité de Cassini :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n.$$
   La fraction $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ est-elle irréductible ?
   (d) Montrer par récurrence la formule de Binet :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)$$
   où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Indication : quelles sont les racines de $x^2 = x + 1$?
   (e) Quelle est la limite de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   Remarque : il est fortement conseillé de ne pas utiliser, dans les prochaines questions, l'expression du terme général de F_n qui vient d'être trouvée.
2. Quelques calculs simples de sommes simples.
   (a) En écrivant $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$.
   (b) De même, calculer $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$ (chercher la somme télescopique !).
   (c) Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k}$, exprimer à l'aide d'un terme de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme $P_n + I_n$ et en déduire $P_n = F_{2n+1} - 1$.
   (d) Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_n$.
   En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{k+1}^2$ puis de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2$.
3. Où l'on double la mise !
   (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme double $D_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} F_j$ de deux manières.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} jF_j$.
4. Fibonacci et Pascal.
   (a) Pour $k \geqslant 3$, on pose $a = F_kF_{k+1}$ et $b = F_kF_{k-1}$.
   • Simplifier $\dfrac{\dbinom{a}{b-1}}{\dbinom{a-1}{b}}$.

• A quelle condition sur k a-t-on $\binom{a}{b-1} = \binom{a-1}{b}$?

• Si on considère le triangle de Pascal : l'entier 1 apparaît une infinité de fois, 2 une seule fois, 3, 4, 5, 7, 8 , 9 , 11, ... deux fois, 6 trois fois, 120 quatre fois. On cherche ici des entiers qui apparaissent plus de 5 fois.



Donner un exemple de deux entiers, différents de 1, qui apparaissent au moins six fois dans le triangle de Pascal.

• Calculer $\binom{78}{2}$, que peut-on en déduire ?

(b) Montrer, par récurrence sur n et en utilisant la formule de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k} = F_{m+2n}.$$

5. Un résultat un peu plus fort (si tout le reste a été fait).
Un théorème Belge.
On souhaite démontrer le résultat suivant :
tout entier naturel n non nul s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$$

$$\text{où } p \in \mathbb{N}^*, \quad k_1 \geqslant k_2 + 2, \quad k_2 \geqslant k_3 + 2\ , \ \cdots\ , \ k_{p-1} \geqslant k_p + 2 \geqslant 4$$

(ainsi $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_p$ et ces entiers ne sont pas consécutifs avec le plus petit qui vaut au moins 2).
Une suite $(F_{k_1}, F_{k_2} \cdots , F_{k_p})$ d'indices ayant cette propriété est appelée Z-décomposition de n.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$F_k =$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584

Par exemple pour décomposer 2023, on applique un algorithme de type «glouton» :
dans la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche le plus grand terme inférieur ou égal à 2023, il s'agit de

$$F_{17} = 1597 \leqslant 2023 < F_{18} = 2584.$$

On retranche F_{17} à n et on recommence. On a donc $2023 - 1597 = 426$ et dans la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$F_{14} = 377 \leqslant 426 < F_{15} = 610$$

Puis $426 - 377 = 49$ et

$$F_9 = 34 \leqslant 49 < F_{10} = 55$$

enfin $49 - 34 = 15$

$$F_7 = 13 \leqslant 15 < F_8 = 21$$

permet de conclure car $15 - 13 = 2 = F_3$. On a donc

$$2023 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_7 + F_3.$$

(a) Existence de la décomposition
En s'inspirant de l'exemple et par récurrence forte, montrer l'existence de la décomposition.
Pour l'hérédité, on considérera deux cas :
Cas ① lorsque $n+1$ est un élément de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cas ② lorsque $n+1$ n'en est pas.
Ne pas oublier la condition de non consécutivité des indices $k_1, \cdots, k_p$.

(b) Un petit lemme
Montrer que la somme de nombres de Fibonacci d'une Z-décomposition d'un entier n, dont le plus grand élément est F_{k_1}, est strictement inférieure à F_{k_1+1}.
Indication : sur l'exemple $F_{17} + F_{14} + F_9 + F_7 + F_3$, on a (pourquoi ?)

$$F_{17} + F_{14} + F_9 + F_7 + F_3 \leqslant F_{17} + F_{15} + F_{13} + F_{11} + F_9 < \sum_{k=0}^{8} F_{2k+1} = F_{18}.$$

(c) Montrer l'unicité annoncée.

Exercice 2

Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f_m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + (m+1)\,z \\ 2x + 3y - mz \\ 2x + my + 6z \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'espace image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m = 0$.

   (a) Calculer $f_0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_0\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?

   (b) Résoudre le système $f_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?

   (c) A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_0 ?

2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.

   (a) Pour $m \notin \{0, 2\}$, montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?

   (b) Que dire de f_2 ?