Exercice 1

1. Des relations intéressantes.
   (a) Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c$, un polynôme de degré deux : on note r_1 et r_2 ses deux racines et $s = r_1 + r_2$, $p = r_1 \times r_2$. Déterminer, preuve à l'appui, une relation entre, d'une part s et p, et d'autre part les coefficients a, b, c du polynôme Q.
   (b) Soit $T(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, un polynôme de degré trois : on note r_1, r_2 et r_3 ses trois racines et $s = r_1 + r_2 + r_3$, $p = r_1 \times r_2 \times r_3$. Déterminer, preuve à l'appui, une relation entre, d'une part s et p, et d'autre part les coefficients a, b, c, d du polynôme T.
2. Déterminer les racines carrées de $\omega = -3 - 4i$.
3. On considère le polynôme P défini par
   $$P(X) = X^3 - (5 + 3i)X^2 + (7 + 16i)X + 3 - 21i.$$
   Prouver que ce polynôme P possède une racine **imaginaire pure** que l'on notera z_0, et la déterminer.
4. On peut donc écrire $P(X) = (X - z_0) \times Q(X)$ où Q désigne un polynôme de degré deux. On propose deux méthodes pour obtenir $Q(X)$.
   (a) <u>Première méthode</u> : déterminer les coefficients de $Q(X)$ à l'aide de la résolution d'un système linéaire après avoir développé $(X - z_0) \times Q(X)$.
   (b) <u>Seconde méthode</u> : que valent la somme et le produit des trois racines du polynôme $P(X)$? En déduire la somme et le produit des deux racines du polynôme $Q(X)$, puis le polynôme $Q(X)$.
5. Déterminer les racines z_0, z_1 et z_2 du polynôme $P(X)$.
6. On note M_0, M_1 et M_2 les trois points du plan d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 : ces trois points sont-ils alignés ?
7. <u>Compléments</u> : sans aucun calcul, préciser la valeur de $\sigma = z_1z_2 + z_0z_2 + z_0z_1$.
   En déduire, sans utiliser les expressions des racines, les valeurs de
   $$S_2 = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 \quad \text{et} \quad S_3 = z_0^3 + z_1^3 + z_2^3.$$

Exercice 2 Soit f définie sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z + i}}$.

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Montrer que f est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}^*$.
   Lorsque $Z \in \mathbb{C}^*$, calculer l'antécédent z de Z par f : il s'agit donc de l'unique élément $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ vérifiant $f(z) = Z$. On le note $z = f^{-1}(Z)$, et la fonction $f^{-1} : \mathbb{C}^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ ainsi construite s'appelle «la **fonction réciproque de la bijection** $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^*$».
2. Déterminer les ensembles (images réciproques) $A = f^{-1}(\mathbb{R})$ et $B = f^{-1}(\mathbb{U})$ où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1. Représenter A et B dans le plan.
3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculer $f(iy)$.
   Déterminer l'image directe de l'ensemble $\Delta = i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ par f (on rappelle que $i\mathbb{R}$ représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire $i \times r$ avec $r \in \mathbb{R}$, autrement dit $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs).
4. On note A le point d'affixe $-\dfrac{i}{2}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des complexes z tel que le point d'affixe z soit sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. Enfin, on note $\mathcal{C}^*$ l'ensemble $\mathcal{C}$ privé de 0.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\left| f(x) + \dfrac{i}{2} \right|^2$.

(b) Que peut-on en déduire (justifier) :

$$① \text{ que } f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^* \,? \qquad \text{ou} \qquad ② \text{ que } \mathcal{C}^* \subset f(\mathbb{R})\,?$$

5. Etude de l'inclusion réciproque

   (a) Justifier que $Z \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $Z = -\dfrac{i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}$.

   (b) Pour quelle valeur de θ, notée θ_0, a-t-on $Z = 0$?

   (c) Pour $\theta \neq \theta_0$, calculer $f^{-1}\left(-\dfrac{i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}\right)$. On trouvera une expression de la forme $\dfrac{a + b\cos\theta}{c + d\sin\theta}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

   (d) En déduire que $f(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^*$.

Exercice 3 Recherche de points fixes

1. On définit la fonction numérique de la **variable réelle**
$$\varphi(x) = \frac{1}{x\ln(|x|)}$$
où x représente un réel et $|x|$ sa valeur absolue.

   (a) Quel est l'ensemble de définition (réel) D de la fonction φ ?

   (b) Etudier la parité de φ.

   (c) Etudier les variations de φ sur D : on résumera toutes ces informations dans un tableau de variations, en y faisant apparaître les différentes limites (justifiées) aux bords.

   (d) Démontrer que l'équation (E) « $\varphi(x) = x$ » possède, sur $\mathbb{R}_+ \cap D = D^+$, une et une seule solution α, avec $\alpha > 1$. On ne demande pas la valeur exacte de cette solution.

2. On définit la fonction de la **variable complexe**
$$f(z) = \frac{1}{z\ln(|z|)}$$
où z représente donc un nombre complexe (et $|z|$ son module).

   (a) Quel est l'ensemble de définition (complexe) Δ de la fonction f ?

   (b) Soit $z \in \Delta$: on pose $|z| = r$ et $z = re^{i\theta}$.
   Exprimer[1] le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et de θ.

   (c) A l'aide la fonction φ, déterminer les points fixes de la fonction f : autrement dit, déterminer les $z \in \Delta$ solutions de l'équation (E') « $f(z) = z$ ».

3. L'application $f : \Delta \to \mathbb{C}^*$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

1. Attention à bien étudier tous les cas de figure ...