Exercice 1

Calculs préliminaires

1. Simplifier $\text{ch}(\ln 2)$ et $\text{sh}(\ln 2)$.
2. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$: rappeler une équation cartésienne de la droite tangente, au point d'abscisse x_0, à la courbe représentative de f (dans un repère orthonormé).

Exercice

Pour tout k réel, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \text{sh}(x) + ke^{-x}$.

3. Montrer que, pour tout réel m, il existe une et une seule fonction f_k vérifiant l'égalité :
$$f_k(\ln 2) = m.$$
On note désormais g_m cette fonction, et Γ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Ainsi, Γ_m contient le point A_m de coordonnées $(\ln 2, m)$.
Donner l'expression de $g_m(x)$.
4. Donner une équation cartésienne de la droite tangente T_m à la courbe Γ_m au point A_m.
5. Prouver l'équivalence suivante, où C et D désignent deux constantes réelles :
$$(\forall m \in \mathbb{R},\ Cm + D = 0) \Leftrightarrow (C = D = 0).$$
6. Montrer que toutes les droites T_m, lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point B dont on précisera les coordonnées.
7. Tracer, dans un même repère orthonormal, l'allure des courbes représentatives des fonctions f_0, $f_{\frac{1}{2}}$ et f_1, accompagnées de leurs tangentes au point d'abscisse $\ln 2$. On donne : $\ln 2 \approx 0,69$.

Exercice 2 Soit f, la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de f.
2. On pose $\varphi(t) = \arcsin(\sin t)$: déterminer, en fonction de $t \in [-\pi, \pi]$, une expression simplifiée de $\varphi(t)$ (il y a plusieurs cas...). Puis représenter l'allure de la courbe représentative de φ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
3. (a) Justifier que, pour tout $x \in D$, on peut poser $\theta = \arcsin(x)$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $x \in D$, et représenter l'allure de la courbe représentative de f.
4. Une seconde méthode
   (a) Pour quels x de D peut-on calculer $f'(x)$? Justifier ces résultats.
   Calculer et simplifier $f'(x)$.
   (b) Retrouver alors les résultats de la question précédente **(3.)**

Exercice 3 **L'inégalité de Wilker** et ses petites soeurs.

1. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
2. Soit g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = 2x^2 + 7x\tan(x) - 9\sin^2(x)$.
Montrer que g est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Indication : la question 2 suit la question 1.
3. Soit f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sin^2(x)\cos(x) + x\sin(x) - 2x^2\cos(x)$.
Etudier les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Préciser le signe de f.
On commencera par prouver que $f''(x) = \cos(x)\, g(x)$.
4. En déduire que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} \geqslant 2.$$
Cette inégalité a été proposée par `J. B. WILKER`, Scarborough College, University of Toronto, Canada, dans la section problème élémentaire de la revue «The American Mathematical Monthly» en 1989. La démarche adoptée ici celle exposée par `LING ZHU` (Zhejiang Gongshang University China) en 2005 dans la revue «Mathematical Inequalities & Applications ».

5. Soit h définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 + \dfrac{x}{\tan x}$.
   (a) Déterminer $\ell = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$. On pose alors $h(0) = \ell$.
   (b) Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $h'(x) = \dfrac{x^2 \cos(x)}{\sin^3(x)} \varphi(x)$ où φ est une fonction dont on précisera le signe.
   (c) En déduire que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
   $$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} \geqslant 2.$$
6. Les deux inégalités que l'on vient d'établir sont-elles encore vraies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$?
   Complément : en s'inspirant de la méthode précédente, il est possible d'établir les inégalités suivantes (ce n'est pas demandé ici) :
   $$\text{pour tout } x \neq 0, \quad \left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)^2 + \frac{\mathrm{th}x}{x} \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{\mathrm{sh}x}\right)^2 + \frac{x}{\mathrm{th}x} \geqslant 2.$$

Exercice 4 La fonction de Lambert.

On définit f sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   On note W la fonction réciproque (dite de Lambert).
2. Que valent $W(0)$, $W(e)$?
3. Quelle est la monotonie de W ? Est-elle dérivable sur J, sinon sur quel intervalle, noté $\mathring{J}$ l'est-elle ?
4. Si $x \geqslant -1$, que vaut $W(xe^x)$? Et si $x \geqslant \dfrac{1}{e}$, que vaut $W(x\ln(x))$?
5. Justifier que si $x > 0$ alors $\ln(W(x)) = \ln(x) - W(x)$.
6. Montrer que si $x \in \mathring{J}$ alors $W'(x) = \dfrac{1}{x + e^{W(x)}}$.
7. Montrer que l'équation $x^x = 2$ a une unique solution notée α et l'exprimer à l'aide de la fonction W.
8. Calcul de $W(\ln 2)$.
   On définit φ sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(2) e^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   (a) A l'aide de l'IAF, justifier que φ est $\ln(2)-$lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, puis qu'elle est également $\frac{7}{10}-$lipschitzienne.
   (b) Montrer que φ a un unique point fixe ℓ que l'on exprimera à l'aide de la fonction W.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et indiquer à partir de quel rang n_0 on est sûr d'avoir l'inégalité $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-4}$. Que permet d'obtenir cette inégalité ?
   (d) Donner alors une valeur approchée de α.
9. Une application : soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^x$.
   (a) Justifier que g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Exprimer g^{-1} à l'aide de W (on posera $X = e^x$ dans un premier temps et penser à utiliser la question **(5.)**)
10. Une autre application : Soit $y \geqslant e$, montrer que l'équation $\dfrac{x}{\ln(x)} = y$ a une unique solution dans l'intervalle $]1, \exp(1)[$, solution que l'on exprimera à l'aide de la fonction W. (On posera $x = e^{-t}$).