Exercice 1 Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n.$$
En déduire l'encadrement :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$
et la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.
3. Etablir, pour tout entier $n \geqslant 0$: $(n+1)I_n = 1 + I_{n+1}$.
En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On se propose d'établir l'irrationalité du nombre e. Pour cela, on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par :
$$u_n = n!e - I_n.$$
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, u_n est un nombre entier.
   (b) On connait l'encadrement $2 < e < 3$: à l'aide de celui trouvé à la question **(2.)**, montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre $n!e = u_n + I_n$ n'est pas un entier.
   (c) On suppose qu'il existe deux entiers p et q strictement positifs tels que $e = \dfrac{p}{q}$.
   Justifier que, pour tout entier $n \geqslant q$, $\left(n!\dfrac{p}{q}\right)$ est un nombre entier. Conclure.

Exercice 2 Soit m et n des entiers strictement positifs fixés.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme P_k par
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = \frac{x^k(m-nx)^k}{k!}.$$

1. Etudier la fonction P_k sur $\left[0, \frac{m}{n}\right]$ afin d'établir
$$\text{pour tout } x \in \left[0, \tfrac{m}{n}\right], \quad 0 \leqslant P_k(x) \leqslant \tfrac{1}{k!}\left(\tfrac{m^2}{4n}\right)^k.$$
2. En déduire
$$\lim_{k \to +\infty} \left(\int_0^{\frac{m}{n}} P_k(x)\sin(x)\mathrm{d}x \right) = 0.$$
3. Etablir les résultats suivants :
   (a) pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k{}'(x) = (m-2nx)P_{k-1}(x)$.
   (b) pour tout $k \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k{}''(x) = -2nP_{k-1}(x) + (m-2nx)^2 P_{k-2}(x)$.
   (c) pour tout $k \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k{}''(x) = -2n(2k-1)P_{k-1}(x) + m^2 P_{k-2}(x)$.
4. On suppose dans cette question que π est un nombre rationnel s'écrivant $\pi = \dfrac{m}{n}$.
On pose, pour tout $k \geqslant 0$: $I_k = \displaystyle\int_0^\pi P_k(x)\sin(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_0 et I_1 (il peut être judicieux de faire des intégrations par parties pour le calcul de I_1).
   (b) A l'aide d'intégrations par parties, vérifier, pour tout $k \geqslant 1$:
$$\int_0^\pi P_k{}''(x)\sin(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\pi P_k{}'(x)\cos(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\pi P_k(x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire, pour tout $k \geqslant 2$, la relation :
$$-I_k = -2n(2k-1)I_{k-1} + m^2 I_{k-2}.$$
   (d) Montrer alors, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que I_k est un entier ($I_k \in \mathbb{Z}$) pour tout $k \geqslant 0$.
   (e) Justifier que, s'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $I_k = I_{k-1} = 0$, alors $I_0 = 0$.
   (f) A l'aide du résultat de la question **(2.)**, justifier proprement que, à partir d'un certain rang, on a nécessairement $I_k = 0$ (i.e justifier qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $I_k = 0$).
5. Montrer que π est un nombre irrationnel i.e $\pi \notin \mathbb{Q}$.