Exercice «$\mathrm{DL}_n(a)$» signifie «développement limité d'ordre n au point a».

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto g(x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}\,(x)}$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto h(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+e^x}$.
3. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par : $f_k\,(x) = g\,(x) + kh\,(x)$.
   (a) Préciser D_{f_k}, l'ensemble de définition de la fonction f_k.
   (b) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_k.
   (c) Donner un équivalent simple de $f_k(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.
   (a) Donner une équation de T_k, tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
5. Déterminer, en fonction de k, la position locale au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et T_k : illustrer ces différentes situations par des schémas clairs.
6. (a) Déterminer les primitives de la fonction h.
   (b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 0$?
7. On définit la fonction φ_k par $\varphi_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}$.
   Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger φ_k par continuité en 0 : on appelle ψ cette fonction φ_k. Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.