PROBLEME On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à **coefficients non constants** :

$$(E) \quad x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = x\ln(x).$$

On souhaite résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à l'aide de différentes méthodes.

1. Préliminaires
   (a) Résoudre sur I l'équation différentielle :
   $$(E_1) \quad x^2y'(x) + 3xy(x) = \ln(x)\ .$$
   (b) Résoudre sur I l'équation différentielle :
   $$(E_2) \quad xy'(x) - y(x) = x\ln(x)\ .$$
   (c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
   $$(E_3) \quad y''(t) - y(t) = te^t\ .$$

2. Première méthode
   Soit f et g, deux fonctions reliées par la relation $f(x) = xg(x)$.
   (a) On prend la notation «D^2» pour «deux fois dérivable». Justifier l'équivalence :
   $$(f \text{ est } D^2 \text{ sur } I) \Leftrightarrow (g \text{ est } D^2 \text{ sur } I).$$
   (b) Prouver l'équivalence :
   $$(f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I) \Leftrightarrow (g' \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } I).$$
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

3. Deuxième méthode
   Soit f et h, deux fonctions reliées par la relation $f(x) = \frac{1}{x}h(x)$.
   (a) Justifier l'équivalence :
   $$(f \text{ est } D^2 \text{ sur } I) \Leftrightarrow (h \text{ est } D^2 \text{ sur } I).$$
   (b) Prouver l'équivalence :
   $$(f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I) \Leftrightarrow (h' \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } I).$$
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
   Comparer ce résultat à celui obtenu à la question **2c**.

4. Troisième méthode
   Soit f et φ, deux fonctions reliées par la relation $f(x) = \varphi(\ln x)$.
   (a) Justifier l'équivalence :
   $$(f \text{ est } D^2 \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\varphi \text{ est } D^2 \text{ sur } \mathbb{R}).$$
   (b) Prouver l'équivalence :
   $$(f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\varphi \text{ est solution de } (E_3) \text{ sur } \mathbb{R}).$$
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
   Comparer ce résultat à celui obtenu aux questions **2c** et **3c**.

5. Quatrième méthode
   On note (EH) l'équation homogène associée à l'équation (E) :
   $$(EH) \quad x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0.$$
   (a) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel α pour lesquelles la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est solution de l'équation (EH). On note α_1 et α_2 ces deux solutions, avec $\alpha_1 < \alpha_2$, puis
   $$\text{pour tout } x \in I,\ u(x) = x^{\alpha_1} \quad \text{et} \quad v(x) = x^{\alpha_2}.$$
   Ces deux fonctions sont non colinéaires, elles forment donc une famille libre : on admet (voir cours de deuxième année) qu'elles constituent une base de $\mathcal{S}_H$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (EH). Ainsi,
   $\mathcal{S}_H = \text{vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$=l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions u et v.
   Comme dans le cas des équations à coefficients constants, les solutions de (E) sont constituées de la somme d'**une** solution de (E) et **des** solutions de (EH). Il reste donc à trouver une solution particulière de (E). Pour cela, on va utiliser une méthode type «variation **des** constantes».

(b) On cherche donc une solution particulière f de (E) sous la forme :
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) = A(x)u(x) + B(x)v(x),$$
où A et B sont des fonctions (dérivables) à déterminer.
Montrer que, si on impose en plus la condition
$$\text{pour tout } x \in I,\ A'(x)u(x) + B'(x)v(x) = 0,$$
alors on a l'implication :
$$\left(\text{pour tout } x \in I, \left\{ \begin{array}{rcrcc} A'(x) & + & x^2B'(x) & = & 0 \\ -A'(x) & + & x^2B'(x) & = & x\ln(x) \end{array} \right. \right) \Rightarrow (f \text{ est une solution de } (E)).$$

(c) En déduire une solution particulière de (E) puis toutes les solutions de (E).
Comparer ce résultat à celui obtenu aux questions **2c**, **3c** et **4c**.

6. Complément
Existe-t-il des solutions de (E) qui soient prolongeables par continuité en 0 ? Si oui, ces solutions, ainsi prolongées, sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice **ENTRAÎNEMENT PERSONNEL**

Déterminer les solutions $y : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$ de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = t + 1 + e^t$
2. $y'' - 4y' + 3y = \text{sh}(3t)$
3. $y'' - 2y' + 5y = te^t$
4. $y'' + 4y' + 4y = \sin^2(t)$
5. $y'' + 3y = e^{-t}\cos(2t)$
6. $y'' + 4y' + 13y = t^2e^{-t}$
7. $2y'' + 2y' + y = 4\sin(t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
8. $y'' + y = e^{-|t|}$

♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡

Solutions de l'exercice :

$$y_1(t) = t + \frac{1}{3}e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ y_2(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{48}e^{-3t}$$

$$y_3(t) = e^t\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) + \frac{1}{4}te^t,\ y_4(t) = Ate^{-2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin(2t)$$

$$y_5(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\sin(2t) + A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$y_6(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{2}{50}t - \frac{3}{250}\right)e^{-t} + e^{-2t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right)$$

$$y_7(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{8}{5}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{16}{5}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{8}{5}\cos(t) - \frac{84}{5}\sin(t)$$

$$y_8(t) = \left\{ \begin{array}{lll} A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si} & t \geqslant 0 \\ A\cos(t) + (B-1)\sin(t) + \frac{1}{2}e^{t} & \text{si} & t < 0 \end{array} \right.$$