Exercice 1 On se propose de déterminer les réels x non entiers tels que

$$\lfloor x \rfloor^3 + 2x^2 = x^3 + 2\lfloor x \rfloor^2$$

Soit x une solution, on pose $a = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Justifier que $a \in \left]0, 1\right[$.
2. Montrer que x est solution de

$$(E) \qquad 3x^2 - x(3a+4) + a(a+2) = 0$$

3. On définit les fonctions f_1 et f_2 sur $[0, 1]$ par

$$f_1(a) = \frac{3a+4+\sqrt{16-3a^2}}{6} \quad \text{et} \quad f_2(a) = \frac{3a+4-\sqrt{16-3a^2}}{6}$$

   Etudier les monotonies de f_1 et f_2.
4. En déduire que

$$x \in \left]0, \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right[\cup \left]\frac{4}{3}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right[$$

5. En séparant en deux cas, conclure.

Exercice 2 On définit la suite $F = (F_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$F_0 = 0 \quad \text{et} \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Dans un premier temps (**1.2.3.4.**), **on ne cherche pas à exprimer le terme** F_n en fonction de n.

1. Ecrire un script en langage PYTHON qui calcule F_n en utilisant la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Afficher la valeur de F_n pour $n = 0 \ldots 20$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

   Montrer qu'il est possible de définir F_{-1} pour que la formule précédente soit vraie pour tout entier $n \geqslant 0$. On suppose désormais que c'est le cas.

3. **Première application**

   Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

   En déduire que, pour tout $p \geqslant 0$, F_{2p+1} peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers. Un exemple : décomposer 1597 comme une somme de deux carrés d'entiers.

   Deuxième application

   Vérifier l'égalité : $A^2 = A + \mathrm{I}$. En déduire :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0,\ F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k.$$

Troisième application

Développer et simplifier : $(\mathrm{I} - A)(\mathrm{I} + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$.
Calculer l'inverse de la matrice $\mathrm{I} - A$.
Déduire, **à l'aide des deux résultats précédents** :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

<u>Complément</u> : trouver une preuve très élémentaire de cette dernière égalité.

Quatrième application

Rappel de propriétés du déterminant :
- si $P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$: $(\text{dét}(P) \neq 0) \Leftrightarrow (P$ est une matrice inversible$)$.
- si $(P, Q) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})^2$ alors $\text{dét}(PQ) = \text{dét}(QP) = \text{dét}(P) \times \text{dét}(Q)$.
- si $P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\text{dét}(P^n) = \text{dét}(P)^n$

(formule valable avec $n = -1$ si P est inversible).
En déduire que la suite g, définie par $g_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$, est géométrique.

4. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$\text{Arctan}\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$
Une application : compléter (les $*$ représentent des entiers deux à deux distincts)
$$\text{Arctan}\left(\tfrac{*}{34}\right) - \text{Arctan}\left(\tfrac{*}{*}\right) = \tfrac{\pi}{4}.$$

5. On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$.
   (a) Donner, pour tout $n \geqslant 0$ une expression de F_n à l'aide de φ, ψ et n.
   (b) Préciser un équivalent simple de F_n (lorsque $n \to +\infty$).
   Puis calculer la limite de la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$.
   (c) On pose, pour $n \geqslant 1$, $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
   Etudier la monotonie de cette suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$, puis calculer sa limite.
   (d) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $r_{n+1} = f(r_n)$ où f est une fonction à préciser.
   Retrouver, à l'aide d'un schéma [1], les résultats de la question précédente (monotonie et limite de la suite r).
   (e) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$: $|\varphi - r_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$. En déduire $|\varphi - r_n| \leqslant \dfrac{1}{F_n^2}$.
   Puis donner une approximation rationnelle de φ à 10^{-4} près. Cette approximation est-elle par excès ou par défaut ? Donner un encadrement de φ par deux nombres décimaux.

Exercice 3

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère la fonction $f_n : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n - x - 1 \end{array} \right.$.

1. Commencer par tracer, dans un même repère orthonormal, les graphes de f et de l'application identité, et retrouver le comportement de la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide de ces représentations.

1. Pour tout $n \geqslant 3$: étudier cette fonction f_n et prouver qu'elle s'annule une, et une seule fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On note u_n l'unique réel positif en lequel la fonction f_n s'annule.
2. Quel est le signe de $f_n(1)$? Que peut-on en conclure concernant la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 3}$?
3. Pour $n \geqslant 3$, quel est le signe de $f_n(u_{n+1})$? Que peut-on en conclure concernant la suite u ?
4. En déduire que la suite u converge. On note ℓ sa limite : que peut-on dire de ℓ ?
5. Rappeler la formule du binôme de Newton, puis prouver :
$$\forall n \geqslant 3,\ f_n(1 + \tfrac{1}{n}) > 0.$$
En déduire la valeur de ℓ
6. On pose $\alpha_n = u_n - \ell$: en remarquant que $n \ln(u_n) = \ln(1 + u_n)$, montrer qu'il existe une constante a non nul tel qu'un équivalent de α_n soit de la forme $\dfrac{a}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Ainsi, on a établi le développement asymptotique de $u_n = \ell + \dfrac{a}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
7. Pour $b \in \mathbb{R}_+^*$ un réel strictement positif, on définit h par $h\,(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)^x - 2 - \dfrac{b}{x}$.
   (a) Justifier que h est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
   (b) Vérifier que pour $x > 0$ (où g est une fonction à expliciter) :
   $$h'\,(x) = g\,(x)\left(1 + \frac{b}{x}\right)^x + \frac{b}{x^2}.$$
   Déterminer les variations de g sur $]0, +\infty[$.
   En déduire la monotonie de h sur $]0, +\infty[$.
   (c) Comment doit-on choisir b pour que h soit toujours négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (d) Justifier que pour tout $n \geqslant 3$, $\ell + \dfrac{a}{n}$ est une valeur approchée de u_n par défaut.