Exercice 1

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les solutions positives de l'équation :

$$(E) : « \, e^x = x + \frac{1}{x} \, ».$$

On définit pour cela les fonctions f et h par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = (x^2+1)\, e^{-x}.$$

1. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
   Représenter sur un même schéma les graphes de f et de la fonction exp.
2. (a) Déterminer $h'(x)$ et $h''(x)$ lorsque cela a un sens.
   (b) En déduire les tableaux de variations de h' et de h sur $\mathbb{R}$ (avec limites aux bords).
   (c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution positive α et vérifier $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a : $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{e}}$.
3. On étudie ici la suite u définie par $u_0 = 1$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(u_n^2 + 1\right) e^{-u_n}.$$
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{4^n}$.
   (d) Pour quelle valeur minimale, notée N, de n le terme u_n est-il, de manière certaine, une valeur approchée de α à 10^{-6} près ? Donner alors une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
4. Pour aller plus loin
   (a) Quelle est la monotonie de l'application composée $h \circ h$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$?
   (b) Préciser les signes de $(u_2 - u_0)$ et de $(u_3 - u_1)$.
   (c) On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   (d) Qui, de u_N et de u_{N+1} est une valeur approchée de α par excès (ou par défaut) ?
   A l'aide de u_N et de u_{N+1}, préciser alors quelles décimales de α on obtient.

Exercice 2

Dans cet exercice, on considère une fonction

$$f : [0, +\infty[\quad \to \quad]0, +\infty[$$

définie sur $\mathbb{R}^+$ et **à valeurs strictement positives**, telle que

(1) f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et on notera $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^+}(|f|)$

(2) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$

(3) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha f(x) \leqslant f''(x)$.

I - Etude de la monotonie de f

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
2. Justifier que f' possède une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe un $c_x \in \left]\dfrac{x}{2}, x\right[$ tel que : $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2} f'(c_x)$.
4. Prouver alors que la limite de f' en $+\infty$ est 0.
5. En déduire que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

II - Détermination de la limite de f en $+\infty$

1. Justifier que f admet nécessairement une limite finie en $+\infty$: on pose $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. On suppose que $\ell > 0$: montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $f''(t) \geqslant \alpha \ell$.
3. En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant f'(0) + \ell \alpha x$.
4. En déduire une absurdité, puis montrer que $\ell = 0$.

III - Majoration de la fonction f

1. Etudier la monotonie et la limite en $+\infty$ de la fonction g définie par
$$g(x) = \alpha [f(x)]^2 - [f'(x)]^2.$$
2. En déduire : $\forall x \geqslant 0$, $\sqrt{\alpha} f(x) + f'(x) \leqslant 0$.
3. Etablir la monotonie sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction h, définie par $h(x) = f(x) e^{\sqrt{\alpha} x}$.
4. Conclure que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) e^{-x\sqrt{\alpha}}$.

IV - Etude des primitives de f

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$: justifier que F possède une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.
2. A l'aide du résultat établi à la partie III-4, prouver que cette limite est finie.
3. Prouver que, parmi les primitives de f sur $\mathbb{R}^+$, il en existe une et une seule qui tend vers 0 en $+\infty$.