PROBLEME

Soit un entier non-nul $n \in \mathbb{N}$. On étudie dans ce problème l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes $(F_n, G_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant l'équation :

$$(E_n)\ :\ (1-X)^n F_n + X^n G_n = 1 \quad \text{et} \quad \deg(F_n) \leqslant n-1,\ \deg(G_n) \leqslant n-1.$$

I - Un peu d'arithmétique des polynômes

Soient $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$: on dit que A et B sont **premiers entre eux** et on note $A \wedge B = 1$ s'il existe $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1.$$

La relation $AU + BV = 1$ est dite **relation de Bézout** et (U, V) est **un** couple de Bézout pour (A, B). Il est clair que la relation A et B premiers entre eux est symétrique, i.e. que $A \wedge B = 1$ si et seulement si $B \wedge A = 1$.

Par exemple $X^2 - 1$ et $X^2 - X - 1$ sont premiers entre eux entre car

$$(X-1)\left(X^2-1\right) + (-X)\left(X^2 - X - 1\right) = 1.$$

De même pour $X^2 + 1$ et X^2 :

$$1 \times \left(X^2+1\right) + (-1) \times X^2 = 1.$$

1. Montrer que si A et B sont premiers entre eux et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec α et β non nuls, alors les polynômes αA et βB sont premiers entre eux.
2. Montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha \neq \beta$ alors $(X - \alpha) \wedge (X - \beta) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que si $A \wedge B = 1$ alors $A^n \wedge B = 1$.
   Etudier la réciproque de ce résultat.
4. Montrer le **théorème de Gauß** :
   $$\text{si } A \wedge B = 1 \text{ et si } A \text{ divise } BC \text{ alors } A \text{ divise } C.$$

II - Etude des couples (F_n, G_n)

1. Montrer que les polynômes X^n et $(1-X)^n$ sont premiers entre eux.
2. En développant le polynôme $(X + (1-X))^{2n-1}$, montrer l'existence d'un couple (F_n, G_n) de polynômes solutions de (E_n).
   On commencera par les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ pour lesquels on précisera les polynômes F_n et G_n.
   On exprimera, dans le cas général, F_n et G_n comme deux sommes pour lesquelles l'indice varie de 1 à $n - 1$.
3. Déterminer en fonction des polynômes F_n et G_n tous les couples de polynômes (A, B) vérifiant la relation de Bezout : $(1-X)^n A + X^n B = 1$.
4. En raisonnant sur les degrés, montrer l'unicité du couple (F_n, G_n) solution de (E_n).
   On vient de prouver l'existence et l'unicité d'une solution (F_n, G_n) au problème (E_n).
5. (a) Calculer $F_n(0)$ et $F_n(1)$.
   (b) Montrer que $G_n(X) = F_n(1-X)$.
   (c) Calculer $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

III - Une équation différentielle vérifiée par F_n

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 2$.

1. En dérivant (E_n), montrer qu'il existe un polynôme Q_n tel que
   $$nF_n - (1-X)F_n' = X^{n-1} Q_n.$$
2. En considérant les degrés et à l'aide d'une valeur particulière, en déduire que le polynôme F_n vérifie l'équation différentielle
   $$\left(E_n'\right) \quad : \quad nF_n - (1-X)F_n' = n\binom{2n-1}{n} X^{n-1}.$$
3. Que vaut $F_n'(0)$?
4. A l'aide de la formule de Leibniz appliquée à (E_n') que l'on évaluera en 0, montrer que
   $$\forall k \in [\![1\,;\, n-1]\!],\ F_n^{(k)}(0) = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$$
   (où $F_n^{(k)}$ représente la dérivée $k^{\text{ième}}$ du polynôme F_n).

5. Déterminer les coefficients $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ du polynôme F_n (on les exprimera à l'aide de coefficients binômiaux).
6. En déduire, à l'aide de $F_n(1)$:
$$\binom{2n-1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}$$
et en considérant le coefficient de X^{n-1} dans F_n que
$$\binom{2n-2}{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}(-1)^{n-1-k}.$$

IV - Racines réelles du polynôme F_n

Dans cette partie on suppose également que $n\geqslant 2$, et on définit le polynôme

$$A_n=(1-X)^n F_n$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A_n.
2. Montrer que 1 et 0 sont racines du polynôme A_n' et déterminer l'ordre de multiplicité de ces racines. Factoriser alors A_n'. Indication : A_n s'exprime aussi en fonction de G_n.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction A_n selon la parité de n.
En déduire que si $p\geqslant 1$, le polynôme F_{2p} possède une unique racine réelle x_p et que $x_p<0$.
Que peut-on dire des racines réelles du polynôme F_{2p+1} ?

V - Etude de la suite (x_p)

1. Calculer pour $p\geqslant 1$,
$$(x_p)^{2p}F_{2p}(1-x_p)$$
et en déduire que $\forall p\geqslant 1$,
$$|x_p|\leqslant\binom{4p-1}{2p-1}^{-\frac{1}{2p}}.$$
Indication : Justifier que si $x\geqslant 1$ alors $F_{2p}(x)\geqslant F_{2p}(1)$.
2. Montrer que $\forall n\geqslant 1$,
$$2^{n-1}\leqslant\binom{2n-1}{n-1}$$
et en déduire que la suite (x_p) est bornée.

VI - Complément

On se propose de retrouver les polynômes F_n et G_n en utilisant les développements limités.

1. Pour $n\geqslant 1$, donner le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de $f_n(x)=\dfrac{1}{(1-x)^n}$.
2. En utilisant (E_n), montrer que pour $x<1$,
$$\frac{1}{(1-x)^n}=F_n(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right).$$
3. Retrouver ainsi les coefficients de F_n.