PROBLEME

Quelques résultats généraux

Soit E, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.
Soit u et v, deux endomorphismes de E. Démontrer les quatre résultats suivants :

(P1) $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$

(P2) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v \circ u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{\vec{0}_E\}$

(P3) $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$

(P4) $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$

On pourra, dans la suite du problème, utiliser ces résultats à condition de les identifier précisément.

Etude des noyaux et images itérés d'un endomorphisme

Soit f, un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{k+1} = f \circ f^k$. Ainsi $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad$ (k *fois*).
On définit alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, les ensembles : $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Qui sont N_0 et I_0 ?
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$N_k \subset N_{k+1} \quad \text{et} \quad I_{k+1} \subset I_k.$$
On peut donc affirmer que, **pour l'inclusion**, la suite $\big(N_k = \mathrm{Ker}(f^k)\big)_{k \geqslant 0}$ est croissante et que la suite $\big(I_k = \mathrm{Im}(f^k)\big)_{k \geqslant 0}$ est décroissante.
3. On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_n = N_{n+1}$.
   (a) Montrer que, sous cette condition : $N_{n+1} = N_{n+2}$.
   (b) Montrer ensuite, pour tout entier $k \geqslant 0$: $N_{n+k} = N_n$.
   (c) Prouver l'égalité $N_n \cap I_n = \{\vec{0}\}$.
   (d) Justifier l'existence de p, le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $N_p = N_{p+1}$.
4. On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_m = I_{m+1}$.
   (a) Montrer que, sous cette condition : $I_{m+1} = I_{m+2}$.
   (b) Montrer ensuite, pour tout entier $k \geqslant 0$: $I_{m+k} = I_m$.
   (c) Prouver l'égalité $E = I_m + N_m$.
   (d) Justifier l'existence de q, le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $I_q = I_{q+1}$.
5. Définition : *on dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de* ***caractère fini*** *s'il existe un entier n et un entier m tels que $N_n = N_{n+1}$ et $I_m = I_{m+1}$.*
Soit f un endomorphisme de E de *caractère fini*. D'après les questions précédentes, on peut alors définir p et q, les plus petits entiers vérifiant respectivement ces relations.
   (a) Montrer[1] que N_p et I_q sont des sous-espaces supplémentaires dans E.
   (b) Prouver l'égalité $p = q$.

Quelques exemples

Pour chacun des exemples suivants, préciser si p et q existent et donner leurs valeurs le cas échéant.

1. E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, et f un projecteur de E.
2. E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, et f une symétrie vectorielle de E.
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (x + y + z, -y, x - y + z)$.
Complément : l'application f est-elle un projecteur de $\mathbb{R}^3$?
4. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (0, x, z)$.
5. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (y, -x + y + z, x - z)$.
6. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P'$.
7. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = X.P$.
8. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(1).X^2$.
9. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(0).X^2$
10. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(2).X^2$
11. $E = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P(0).X^2 - P(1).X$

1. Pour cette question et la suivante, on n'hésitera pas à utiliser les sev N_{p+q} et I_{p+q}.