

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice Soit la suite S définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On définit alors les suites extraites u et v par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = S_{2n+1}$ et $v_n = S_{2n}$.

1. (a) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3 . On ne demande pas forcément de réduire les fractions au même dénominateur, il s'agit juste d'explicitier clairement les termes de la somme.

Expliciter alors u_0, u_1, v_0, v_1 .

- (b) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

- (c) Que peut-on en conclure concernant la suite S ?

2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f_0(x) = x - \tan(x)$ et

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad f_n(x) = f_{n-1}(x) - \frac{(-1)^n}{2n+1} (\tan(x))^{2n+1}$$

- (a) Que vaut, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f_1(x)$? $f_2(x)$?

- (b) Calculer $f_n(0)$ pour tout $n \geq 0$.

- (c) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f'_n(x) = (-1)^{(n+1)} (\tan(x))^{2n+2}.$$

- (d) Montrer que $f_{2p} \leq 0$ et $f_{2p+1} \geq 0$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ (pour $p \in \mathbb{N}$).

- (e) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, on a $f_{2p+1}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - u_p$.

On admettra, sans le démontrer, qu'on prouve de même : $f_{2p}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - v_p$.

- (f) En déduire que la suite S converge vers $\frac{\pi}{4}$.

3. Que peut-on dire de l'erreur faite lorsqu'on prend $4u_6$ comme valeur approchée de π ?

PROBLEME

Pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout réel x , on pose $f_k(x) = x^k + x + 1$ et on se propose d'étudier certaines propriétés des fonctions ainsi définies. On note C_k la courbe représentant f_k dans un repère orthonormal. Quand cela sera possible, on présentera les résultats de façon claire dans un tableau (de signes, de variations, de positions, etc...).

PRELIMINAIRE : Quelques rappels de cours.

On se donne un entier naturel q impair.

1. Rappeler la définition de la fonction ($x \mapsto \sqrt[q]{x}$) puis tracer sur un même schéma les graphes des fonctions ($x \mapsto x^q$) et ($x \mapsto \sqrt[q]{x}$).

2. Soit x un réel. Montrer que $\sqrt[q]{x} = -\sqrt[q]{-x}$.

3. En déduire que, pour $x < 0$, l'on peut écrire $\sqrt[q]{x} = -\exp\left(\frac{1}{q} \ln(-x)\right)$.

PARTIE 1 - Étude de f_2 et de f_3

1. Etudier f_2 (tableau de variations, limites en $+\infty$ et $-\infty$). On remarquera que C_2 est une parabole dont on précisera l'axe, le sommet, le foyer et la directrice.
2. Etudier f_3 (tableau de variations, limites en $+\infty$ et $-\infty$).
3. Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f_3(x) - f_2(x)$? En déduire les points d'intersection de C_2 et C_3 (dont on précisera les coordonnées), et la position relative des deux courbes.
4. Tracer, sur une même figure, C_2 et C_3 .

PARTIE 2 - Étude de f_k lorsque k est pair ($k = 2n, n \geq 1$)

1. Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)$?
En déduire que C_{2n} et C_{2n+2} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées). Quelle est la position relative de ces deux courbes?
2. Etudier la fonction f_{2n} . Montrer qu'elle admet un minimum m_n atteint en α_n où

$$\alpha_n = -\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} \quad \text{et} \quad m_n = \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} + 1.$$
3. Montrer que : $-1 < \alpha_n < 0$ et $m_n > 0$.
4. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$.
5. On se propose d'étudier la monotonie de la suite (α_n) . A cet effet, on définit sur l'intervalle $[+2, +\infty[$ une fonction auxiliaire φ par :

$$\varphi(u) = -\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u-1}}.$$

- (a) Ré-écrire $\varphi(u)$ à l'aide de la fonction exponentielle. Puis montrer que la dérivée $\varphi'(u)$ peut s'écrire sous la forme $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{(u-1)^2}$ où ψ est une fonction que l'on explicitera.
 - (b) Déterminer le signe de $\psi'(u)$ puis celui de $\varphi'(u)$.
 - (c) Conclure¹ quant à la monotonie de la suite (α_n) .
6. Tracer, sur une même figure, C_{2n} et C_{2n+2} : on précisera notamment la tangente à chacune de ces deux courbes en son point d'abscisse 0, ainsi que sa position par rapport aux courbes.

PARTIE 3 - Étude de f_k lorsque k est impair ($k = 2n + 1, n \geq 1$)

1. Montrer que C_{2n+1} admet le point de coordonnées $(0, 1)$ comme centre de symétrie.
2. Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f_{2n+3}(x) - f_{2n+1}(x)$? En déduire que C_{2n+1} et C_{2n+3} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées). Quelle est la position relative de ces deux courbes?
3. Etudier la fonction f_{2n+1} . Montrer que $f_{2n+1}(x)$ s'annule pour une valeur a_n , et une seule, de x et que a_n vérifie : $-1 < a_n < -\frac{1}{2}$.

¹Question facultative : pourquoi l'étude de la monotonie de la suite (m_n) est-elle immédiate?

4. Ecrire l'équation de la tangente T à C_{2n+1} au point I d'abscisse 0. Etudier la position de C_{2n+1} par rapport à T . Qu'en déduit-on concernant le point I ?
5. Tracer, sur une même figure, C_{2n+1} et C_{2n+3} .

PARTIE 4 - Étude de la suite (a_n) et de suites et séries qui lui sont liées

1. Montrer que $f_{2n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^{2n+1} - a_{n+1}^{2n+3}$.

En déduire que $f_{2n+1}(a_{n+1}) < 0$, puis que la suite (a_n) est décroissante².

2. Montrer³ que la suite (a_n) est convergente, et de limite égale à -1 .

3. Montrer que les suites (a_n^{2n}) et (a_n^n) convergent vers 0.

4. Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{2n+1}\left(-1 + \frac{1}{n}\right)$.

En déduire l'existence d'un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, -1 + \frac{1}{n} < a_n$.

5. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

(b) Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la somme $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$.

A l'aide de la double inégalité précédente astucieusement utilisée, montrer que l'on a l'encadrement : $\ln(p+1) \leq S_p \leq \ln(p) + 1$.

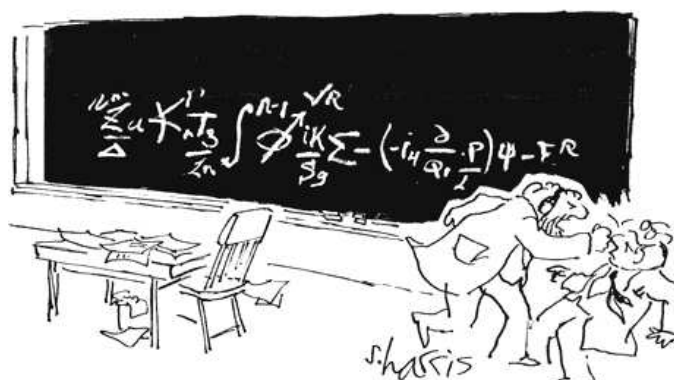
(c) En déduire alors un équivalent simple de S_p lorsque p tend vers l'infini.

(d) Donner également la valeur de $\lim_{p \rightarrow +\infty} (S_p)$.

6. On définit les trois suites (U_p) , (V_p) et (W_p) par :

$$\text{pour } p \geq 1, \quad U_p = \sum_{n=1}^p (1 + a_n), \quad V_p = \sum_{n=1}^p (a_n)^{2n} \quad \text{et} \quad W_p = \sum_{n=1}^p (|a_n|^n).$$

A l'aide de minoration simples, montrer successivement que ces trois suites croissantes divergent, c'est-à-dire que leur limite, lorsque $p \rightarrow +\infty$, est $+\infty$.



"You want proof? I'll give you proof!"

²S'aider du tableau de variations de f_{2n+1} .

³Commencer par justifier que $L = \lim(a_n)$ existe, et justifier, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $L = -1$.

On n'oubliera pas que $a_n < 0$ et que par conséquent des écritures du type $\ln a_n$ n'ont pas de sens!