La calculatrice n'est ***pas autorisée****.*

Cette épreuve comporte 15 questions.

Les différentes parties de l'épreuve sont totalement indépendantes.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question correspond sur la feuille réponse une ligne de cases.
Chaque ligne comporte 5 cases : (a)-(b)-(c)-(d)-(e).
Pour chaque ligne, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

1. Si vous décidez de ne pas traiter la question, la ligne doit rester vierge
2. Si il y a deux réponses qui vous semblent exactes, alors vous cochez les cases correspondantes avec des **grosses** croix.
3. Si il y a une réponse qui vous semble exacte, vous cochez la case correspondante avec une **grosse** croix
4. **Si aucune réponse ne vous semble exacte**, alors vous cochez la case (e).

Le barême sera a priori le suivant :
1 croix exacte = + 2 points
1 croix fausse = -1 point
case vide = 0 point.

Attention : vos croix doivent être très lisibles. Toute ambigüité sera comptée de manière pénalisante. Il est néanmoins possible de barrer **nettement** une réponse (la ligne complète) si elle ne doit pas être prise en considération.

Enfin : la grille de réponse est la dernière feuille de ce sujet. Elle est à dégrapher et à rendre à la fin de la composition. ATTENTION : il ne sera pas donné d'autre grille vierge. Il est donc conseillé de répondre directement sur le sujet, puis de remplir la grille à la fin de l'épreuve. N'oubliez pas d'y écrire votre nom...

Partie I

Question 1 Soient a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variable réelle x et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $a(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} b(x)$.

(a) Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de α avec $\lim\limits_{x \to \alpha} \varepsilon(x) = 0$ et $\ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1 + \varepsilon(x))$.

(b) $\ln(a(x)) \underset{x \to \alpha}{\sim} \ln(b(x))$

(c) $\ln(1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x)) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(1 + x)$ car $1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$

(d) $\ln(|\sin(x)|) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(|x|)$

Question 2 Quelques limites en utilisant des équivalents :

(a) Pour $\beta \neq 0$, et α réels, on a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = -\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

(b) Pour $\beta \neq 0$, et α réels, on a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\tan(\dfrac{3x}{2})\right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$

(d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\tan(\dfrac{3x}{2})\right)^{\tan(3x)} = e$

Question 3 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \exp(\frac{1}{x})\sqrt{x(x+2)}.$$

(a) Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, on a $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)$.

(b) En $+\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote.

(c) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote.

(d) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote et la courbe est au-dessus de son aymptote.

Question 4 Soit a, b, deux réels, et la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{n^b}$

(a) Si $a > 0$ et $b > 0$, alors la limite de la suite u est $+\infty$.

(b) Si $a < 0$ et $b < 0$, alors la limite de la suite u est $-\infty$.

(c) Si $a > 0$ et $b > 1$, alors la limite de la suite u est $+\infty$.

(d) Si $a < 0$ et $b < 1$, alors la limite de la suite u est 0.

Partie II

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{t^2-1}{t}, \quad y(t) = \frac{t-1}{t(t+1)} \text{ où } t \text{ est un paramètre réel, } t \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Question 5 Pour t tendant vers 0, la courbe $\mathcal{C}$ admet :

(a) une branche infinie.

(b) pour asymptote, la droite d'équation $y = 2x - 1$.

(c) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe (Ox).

(d) pour asymptote, la droite d'équation $y = x + 2$.

Question 6 Pour t tendant vers -1, la courbe $\mathcal{C}$ admet :

(a) deux branches infinies distinctes (pour $t \to -1^+$ et pour $t \to -1^-$).

(b) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe (Oy).

(c) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe (Ox).

(d) pour asymptote, l'axe (Ox).

Question 7 La courbe $\mathcal{C}$ admet :

(a) au plus deux asymptotes

(b) au moins deux asymptotes

(c) deux asymptotes parallèles à (Ox)

(d) deux asymptotes parallèles à (Oy)

Question 8

(a) $\forall t \in \mathcal{D},\ x'(t) > 0$

(b) $x'(t) = 0$ pour $t^2 = 1$

(c) La fonction $(t \to x(t))$ est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}$

(d) La fonction $(t \to x(t))$ admet un extremum en $t = 1$.

Question 9 On suppose que y' s'annule pour deux valeurs α et β telles que $\alpha < 0 < \beta$. Si vous jugez que cette hypothèse n'est pas possible, alors marquer la case E pour votre réponse. Dans le cas contraire :

(a) $\alpha\beta = -1$

(b) $\alpha + \beta = 1$

(c) $\alpha\beta = 1$

(d) $\alpha + \beta = 2$

Question 10 A partir du tableau de variations des fonctions x et y, nous obtenons les informations suivantes :

(a) x étant une fonction impaire, alors $\mathcal{C}$ admet l'axe (Oy) pour axe de symétrie.

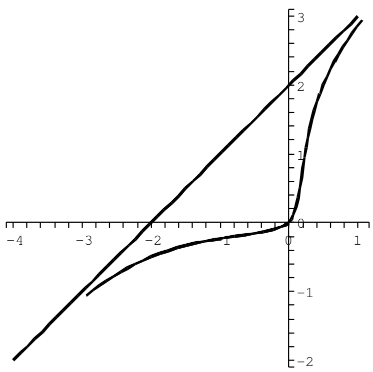
(b) x est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(c) y est bornée sur l'intervalle $]-1, 0[$.

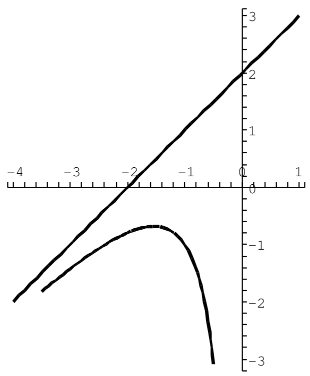
(d) y admet un extremum (et un seul) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Question 11

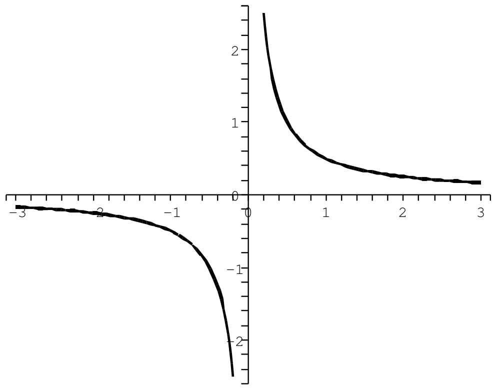
(a) Pour $t \in]0, +\infty[$, $\mathcal{C}$ est réprésentée par :



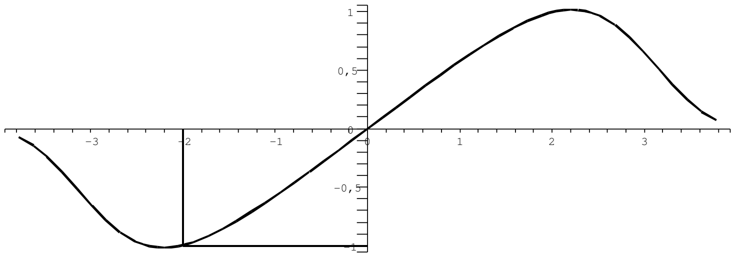
(b) Pour $t \in]0, +\infty[$, $\mathcal{C}$ est réprésentée par :



(c) Pour $t \in]-\infty, -1[$, $\mathcal{C}$ est représentée par :



(d) Pour $t \in]-\infty, -1[$, $\mathcal{C}$ est représentée par :



Partie III

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B}_0$. On considère l'endomorphisme f de E de matrice M par rapport à $\mathcal{B}_0$ et l'endomorphisme g de E de matrice N par rapport à $\mathcal{B}_0$ et l'on donne les matrices M et N ci-après.

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 12 L'application f est une rotation vectorielle : notons son axe Δ, orienté par un vecteur $\vec{a}$, et θ, une mesure de son angle prise dans $[-\pi, \pi[$.

(a) $|\theta| = \dfrac{2\pi}{3}$.

(b) $|\theta| = \dfrac{\pi}{3}$.

(c) $M^3 = I$, où I est la matrice de l'identité

(d) $M^3 = -I$

Question 13 On a :

(a) $N = {}^tN$

(b) $N^2 = N$

(c) $N^2 = I$ où I est la matrice de l'identité

(d) N est une matrice de rang 2

Question 14 On a :

(a) l'application g est une symétrie vectorielle orthogonale

(b) l'application g est un projecteur orthogonal

(c) $g(\vec{a}) = \vec{a}$

(d) $g(\vec{a}) = -\vec{a}$

Question 15 On a :

(a) M et N commutent

(b) $N \times M = 0$

(c) $N \times M = I$

(d) en posant $N' = I - N$, $M^{-1} \times N' \times M = N'$