

La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Déterminer les développements limités à l'ordre n et au voisinage du point x_0 de $f(x)$ lorsque :

1. $f(x) = \operatorname{sh}(x) + e^x \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$ et $n = 3$.
2. $f(x) = \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$, $x_0 = 0$ et $n = 3$.
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ et $n = 2$.
4. $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)} - \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$ et $n = 3$. Pour celui-ci, on précisera l'allure locale de la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse 0 (position par rapport à la tangente).

Exercice 2 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans Q_1 et Q_2 d'équations respectives

$$(Q_1) \ll x + 2y - z + 1 = 0 \gg \quad \text{et} \quad (Q_2) \ll x - y + 2z - 2 = 0 \gg.$$

1. Montrer que $Q_1 \cap Q_2$ est une droite D dont on précisera une représentation paramétrique.
2. Pour tout réel m , on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation

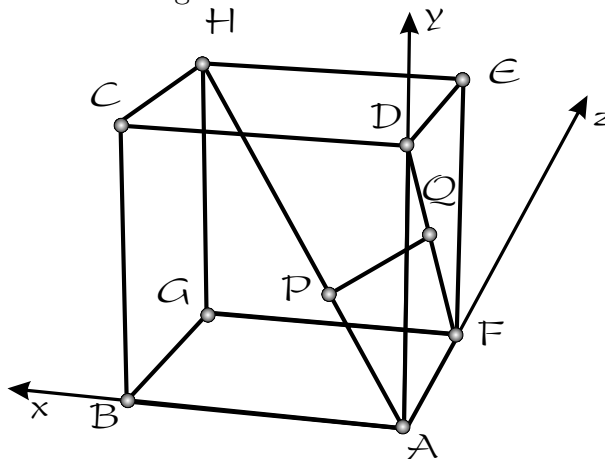
$$(x + 2y - z + 1) + m(x - y + 2z - 2) = 0.$$

Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est un plan.

3. Que dire de la droite D vis-à-vis du plan P_m ? Justifier correctement la réponse.
4. Parmi les plans P_m , en existe-t'il un qui soit perpendiculaire à Q_1 ? Si oui, lequel?
5. On considère \mathcal{S} , l'ensemble d'équation $\ll x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \gg$.
Vérifier que \mathcal{S} est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
6. Pour tout réel m , calculer la distance d_m du point Ω au plan P_m .
7. Existe-t'il des plans P_m qui soient tangents à la sphère \mathcal{S} ? Si oui, combien?
8. Justifier que $P_1 \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre ω et le rayon r .

Exercice 3

On considère un cube d'arête de longueur 1. Les notations sont celles de la figure ci dessous.



On se propose de déterminer la perpendiculaire commune (PQ) des droites (AH) et (DF) (avec $P \in (AH)$ et $Q \in (DF)$).

On se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$ indiqué par la figure.

On définit les réels u et v par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{DQ} &= v\overrightarrow{DF}\end{aligned}$$

1. Donner les coordonnées des points A, D, F, H et des vecteurs $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AD}$ dans le repère \mathcal{R} .
2. En écrivant que (PQ) est perpendiculaire à (AH) et à (DF) , trouver u et v .
Indication : on pourra remarquer et utiliser $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \dots$
3. En déduire les coordonnées de P, Q .
4. Quelle est l'intersection de la droite (PQ) avec la face $(ABGF)$ du cube ?
5. En déduire une construction simple de la perpendiculaire commune cherchée.

Exercice 4 La cissoïde de Diocles

Vers 430 av J.C, la peste régnait à Délos ; on consulta l'oracle . Pour être apaisé, Apollon exigea qu'on lui construise un autel deux fois plus grand que celui qui lui était déjà consacré, tout en conservant à l'édifice sa forme cubique. La peste continua ...

Pour doubler le volume du cube, il faut multiplier son coté par $\sqrt[3]{2}$. Or parmi les grecs, il y avait les «puristes» (Euclide,..) et les autres (Dioclès). Les puristes n'acceptaient que les constructions à la règle et au compas, à l'exception de tout autre procédé. Malheureusement on ne peut pas donner une construction à la règle et au compas de $\sqrt[3]{2}$ (résultat du à Galois en 1830).

Cependant, Dioclès vers 180 av J.C proposa une construction qui utilise une courbe auxiliaire : la cissoïde, mais que l'on doit construire point par point. Par la suite Newton proposa un tracé mécanique de la cissoïde, le problème de la duplication exacte du cube était résolu (mécaniquement...).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O et d'axes notés (Ox) et (Oy) .
On désigne :

- par Δ_1 la droite d'équation $x = 1$
- par Δ_2 la droite d'équation $x = 2$
- \mathcal{C} le cercle de centre Ω de coordonnées $(-1, 0)$, de rayon 1.
- \mathcal{C}' le cercle de **diamètre** $[OA]$ où A est de coordonnées $(1, 0)$.

Pour tout nombre réel t , on désignera par

- D_t la droite d'équation $y = tx$
- $B(t)$ le point d'intersection de Δ_1 et de D_t
- $H(t)$ le point d'intersection de Δ_2 et de D_t
- $C(t)$ le point d'intersection de \mathcal{C} et D_t (autre que O)
- $E(t)$ le point d'intersection de \mathcal{C}' et D_t (autre que O)
- $M(t)$ le milieu du segment d'extrémités $H(t)$ et $C(t)$

1. Construction de $M(\frac{1}{2})$, $M(1)$, $M(\frac{3}{2})$

Faire un unique schéma sur lequel seront représentés tous les éléments définis dans le préambule, avec $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ et $t = \frac{3}{2}$.

2. Une représentation paramétrique de la cissoïde Γ

(a) Donner une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} .

(b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points $H(t)$, $C(t)$ et $M(t)$.

On notera $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$: la trajectoire Γ décrite par $M(t)$ lorsque t parcourt \mathbb{R} est appelée *cissoïde de Dioclès*.

Indication : on trouvera

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

3. Une autre caractérisation de la cissoïde Γ

Montrer que $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{E(t)B(t)}$.

4. Étude la courbe Γ (la cissoïde) formée par les $M(t)$ lorsque t varie

(a) Justifier que Γ présente un axe de symétrie.

(b) Dresser le tableau de variations simultanées des fonctions $[t \mapsto x(t)]$ et $[t \mapsto y(t)]$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

(c) Préciser la nature du point de paramètre $t = 0$, la tangente en ce point et la position locale de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

(d) Préciser la branche infinie de Γ obtenue pour $t \rightarrow +\infty$.

(e) Tracer Γ sur un nouveau schéma.

Remarque importante : les questions qui suivent sont très largement indépendantes les unes des autres, donc peuvent être traitées individuellement.

5. Détermination d'une équation cartésienne de Γ

On désigne par Γ' l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation : $x(x^2 + y^2) = y^2$.

(a) Prouver que $\Gamma \subset \Gamma'$.

(b) Prouver que $\Gamma' \subset \Gamma$. Conclusion ?

6. Détermination d'une équation polaire de Γ

Donner des coordonnées polaires du point $M(t)$.

7. Construction de la tangente en un point de la cissoïde

Soit M un point de la cissoïde et B le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite Δ_1 .

Soit S le point de Δ_1 tel que $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

(a) Représenter ces éléments sur un nouveau schéma.

(b) En prenant $M = M(t)$, donner une équation cartésienne (dépendant de t , mais simplifiée) de la tangente T_t à Γ en $M = M(t)$.

(c) Montrer que la droite (MS) est la tangente à Γ en M .

8. *La duplication du cube*

Soit α , le point de coordonnées $(0, 2)$: la droite $(A\alpha)$ coupe la cissoïde Γ en un point K . La droite (OK) coupe Δ_1 en un point L .

Déterminer la valeur de la longueur AL . Conclusion ?

9. *Etude tangentielle*(a) Résultat préliminaire

Soit trois points M, M', M'' du plan, de coordonnées respectives $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$.

Montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si, le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix}$ est nul.

(b) Soient $M(t_1), M(t_2)$ et $M(t_3)$ trois points deux à deux distincts de la cissoïde.

Montrer que ces points sont alignés si et seulement si $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$.

(c) Soit $t \neq 0$ et T_t la tangente à Γ en $M(t)$: montrer que T_t rencontre Γ en un unique point N , distinct de $M(t)$, appelé **tangentiel de $M(t)$** .

Préciser¹ le paramètre de N en fonction de t .

(d) Donner une méthode simple de construction du tangentiel (utiliser la construction de la tangente).

(e) Montrer que trois points de Γ sont alignés si et seulement si leurs tangentiels respectifs sont alignés.

Exercice 5 (*Facultatif. N'aborder cet exercice que si tout le reste a été fait*)

Soit $n \geq 1$, un entier naturel non nul, et la fonction s définie par

$$s(x) = \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right), \quad \text{autrement dit} \quad s(x) = \ln \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right).$$

1. Calculer et simplifier $s'(x)$.
2. Calculer le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction s .
3. Calculer le développement limité d'ordre $n + 1$ au voisinage de 0 de la fonction s .
4. Préciser l'allure locale au voisinage de 0 de la courbe représentative de s .

¹Le point N appartient à Γ , donc $N = M(s)$ pour un certain s : on demande ici une expression de s en fonction de t . Indication : cette expression est très simple ! On pourra revenir à la définition d'une tangente à une courbe.