

*La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.*

**Exercice 1** (Questions de cours, plus ou moins indépendantes)

1. (a) Donner les solutions, sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$(E) \ll (e^x - 1)y'(x) + e^x y(x) = \cos(x) \gg.$$

- (b) On note  $f$  la solution de  $(E)$  vérifiant la condition  $f(\pi) = 0$ .

Préciser une expression de  $f$ .

- (c) Montrer qu'on peut prolonger  $f$  par continuité en 0.

On désigne encore par  $f$  cette fonction ainsi prolongée.

- (d) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 (à droite) de  $f$ .

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Donner les solutions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

(a)  $(E_1) \ll 2y'' + 5y' - 3y = 6 \gg$

(b)  $(E_2) \ll y'' + 6y' + 9y = 8e^x \gg$

(c)  $(E_3) \ll y'' + 4y' + 5y = \cos(x) \gg$

3. Combien y-a-t'il de solutions de  $(E_3)$  vérifiant (respectivement) la condition

(a)  $y(0) = 2008$  et  $y'(0) = 2009$ .

(b)  $y(0) = 0$  et  $y(\pi) = 0$ .

**Exercice 2** On considère l'arc paramétré défini en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \cos 2\theta + \cos^2 \theta.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative associée, et  $M = M(\theta)$  le point de coordonnées polaires  $(\theta, \rho(\theta))$ .

1. Quelle est la périodicité  $T$  de  $\rho$ ?

Si on trace le support de l'arc lorsque  $\theta$  décrit un intervalle de largeur  $T$ , quelle transformation géométrique doit-on effectuer ensuite afin d'obtenir  $\mathcal{C}$  en entier? Justifier à l'aide d'un dessin.

2. Quelle est la parité de  $\rho$ ?

Si on trace le support de l'arc lorsque  $\theta$  décrit  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , quelles transformations géométriques doit-on effectuer ensuite afin d'obtenir  $\mathcal{C}$  en entier? Justifier à l'aide d'un dessin.

3. Pour quelle valeur de  $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  a-t-on  $\rho(\theta_0) = 0$ ?

On exprimera le résultat à l'aide de la fonction arccos et on justifiera la position de  $\theta_0$  par rapport à  $\frac{\pi}{4}$ .

Dresser le tableau de signe de  $\rho$  sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

4. Préciser les variations de  $\rho$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Dresser le double tableau, variations-signes de  $\rho$ .
5. Pour quelle(s) valeur(s) de  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , la tangente est-elle perpendiculaire à  $(OM)$  ?
6. Tracer la partie de la courbe  $\mathcal{C}$  correspondant à  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis, sur un autre schéma, la totalité de la courbe  $\mathcal{C}$ .
7. La courbe  $\mathcal{C}$  est symétrique par rapport à  $(Oy)$  : quelle propriété de  $\rho$  cela traduit-il ?
8. Calculer  $\tan \theta_0$ . Donner alors un procédé de construction de la tangente en  $M(\theta_0)$ .
9. Pour  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , préciser les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles les tangentes en  $M(\theta)$  sont verticales ou horizontales. Montrer que les (deux) points trouvés ont des ordonnées opposées.

### Exercice 3

Dans cet exercice, on considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et l'équation différentielle

$$(E) \quad \ll y'' - y = f(x) \gg.$$

On notera  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation

$$(EH) \quad \ll y'' - y = 0 \gg.$$

2. On définit les fonctions  $C$  et  $S$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$C(x) = \int_0^x f(t) \operatorname{ch}(t) dt \quad \text{et} \quad S(x) = \int_0^x f(t) \operatorname{sh}(t) dt.$$

Justifier que ces deux fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $C'(x)$  et  $S'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Soit  $g$ , fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{sh}(x)C(x) - \operatorname{ch}(x)S(x).$$

Montrer que  $g$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .

Préciser alors l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

4. On suppose désormais que  $f$  est une *fonction périodique* de période  $T > 0$ .

On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = g(x+T) - g(x)$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est une solution de l'équation  $(EH)$ .
- (b) En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , une expression de  $\varphi(x) = g(x+T) - g(x)$  ne faisant intervenir que les quantités  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $g(T)$  et  $g'(T)$ .
- (c) Résultat intermédiaire : soit  $\lambda, \mu$  deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \operatorname{ch}(x) + \mu \operatorname{sh}(x) = 0.$$

Montrer que  $\lambda = \mu = 0$ .

- (d) En déduire qu'il existe une et une seule solution de  $(E)$  qui soit périodique de période  $T$ .

**Exercice 4** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

On se propose d'étudier les couples  $(X, Y)$  de fonctions réelles d'une variable réelle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  telles que

$$\forall t \in I, \quad X'(t)Y(t) - X(t)Y'(t) = A(t) \quad (*)$$

où  $A$  est une fonction continue sur  $I$ .

Toute courbe du plan de représentation paramétrique  $\begin{pmatrix} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{pmatrix}$ , où  $(X, Y)$  est solution, sera appelée *courbe intégrale* de  $(*)$ .

### Partie I

Dans cette partie, on recherche des couples solutions  $(X, Y)$  avec

$$I = ]0, +\infty[, \quad A(t) = 0 \quad \text{et} \quad X(t) = t.$$

- Déterminer l'équation différentielle  $(E)$  vérifiée par  $Y(t)$ .
- Quelle est l'allure des courbes intégrales de  $(*)$  dans ce cas ? En tracer quelques-unes.

### Partie II

Dans cette partie, on recherche des couples solutions  $(X, Y)$  avec

$$I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad A(t) = -\tan^2 t \quad \text{et} \quad X(t) = \sin t.$$

- Déterminer l'équation différentielle  $(E)$  vérifiée par  $Y(t)$ .
- Donner la solution générale de l'équation sans second membre associée à  $(E)$ .
- En utilisant la méthode de la variation de la constante, donner une solution particulière de  $(E)$ .
- Préciser la solution de  $(E)$  telle que  $Y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On considère désormais cette solution.
- Montrer que, dans ce cas, la courbe intégrale de  $(*)$  admet comme équation polaire  $\rho(t) = \tan t$ .
- Tracer la courbe d'équation polaire  $\rho(t) = \tan t$ , pour  $t \in [0, 2\pi]$  (on pourra réduire l'intervalle d'étude et effectuer les symétries ad-hoc).
- Quelle partie de cette courbe correspond à la courbe intégrale du problème  $(*)$  dans ce cas ?

### Partie III

Dans cette partie et la suivante, on recherche des couples solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .

Dans cette partie et uniquement celle-ci, on suppose que

$$A(t) = 1, \quad X''(t) = \lambda X(t) \quad \text{et} \quad X \text{ ne s'annule pas sur } I$$

où  $\lambda$  désigne un paramètre réel non nul.

1. Montrer que  $Y$  vérifie la même équation différentielle que  $X$ .
2. On suppose que  $\lambda = a^2$  où  $a$  est un réel positif non nul, et on prend  $I = \mathbb{R}$ .

- (a) Déterminer le couple solution vérifiant les conditions initiales

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = 0.$$

Reconnaitre les fonctions  $X$  et  $Y$ .

- (b) Simplifier  $X^2(t) - a^2 Y^2(t)$ .

En déduire la nature des courbes intégrales de (\*) dans ce cas : tracer leur allure.

3. On suppose que  $\lambda = -a^2$  où  $a$  est un réel positif non nul et on prend  $I = \left] -\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right[$ .

- (a) Déterminer le couple solution vérifiant les conditions initiales

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = 0.$$

Reconnaitre les fonctions  $X$  et  $Y$ .

- (b) Tracer l'allure des courbes intégrales de (\*) dans ce cas (qui sont des courbes simples et connues que l'on précisera).

#### Partie IV

Dans cette partie, on suppose que

$$A(t) = e^{\alpha t}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel non nul, et } X \text{ ne s'annule pas sur } I.$$

On suppose également que  $X$  est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$(F) \quad X'' = \alpha X' + \beta X \quad \text{où } \beta \text{ est un réel.}$$

1. Montrer que  $Y$  est solution de la même équation.
2. Pour  $\alpha = 1$ , à quelle condition sur  $\beta$ , existe-t-il un couple solution sur  $I = \mathbb{R}$  vérifiant les conditions initiales

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = 0.$$

Attention : il y a différents cas de figure à étudier, et ne pas oublier toutes les contraintes du problème.