

La calculatrice n'est pas autorisée.

Cette épreuve comporte 21 questions.

Les différentes parties de l'épreuve sont totalement indépendantes.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question correspond sur la feuille réponse une ligne de cases. Chaque ligne comporte 5 cases : (a)-(b)-(c)-(d)-(e).

Pour chaque ligne, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

1. Si vous décidez de ne pas traiter la question, la ligne doit rester vierge
2. Si il y a deux réponses qui vous semblent exactes, alors vous cochez les cases correspondantes avec des **grosses** croix.
3. Si il y a une réponse qui vous semble exacte, vous cochez la case correspondante avec une **grosse** croix
4. **Si aucune réponse ne vous semble exacte**, alors vous cochez la case (e).

Le barème sera a priori le suivant :

1 croix exacte = + 2 points

1 croix fausse = -1 point

case vide = 0 point.

Attention : vos croix doivent être très lisibles. Toute ambiguïté sera comptée de manière pénalisante.

Enfin : la grille de réponse est la dernière feuille de ce sujet. Elle est à dégraphée et à rendre à la fin de la composition. **ATTENTION** : il ne sera pas donné d'autre grille vierge. Il est donc conseillé de répondre directement sur le sujet, puis de remplir la grille à la fin de l'épreuve. N'oubliez pas d'y écrire votre nom...

Peanuts

By Schulz



Partie I

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 2x + 3y$$

$$g(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y$$

Question 1

- (a) Le seul point critique de f est $A = (-1, 0)$.
- (b) Le seul point critique de g est $B = (-1, 0)$.
- (c) Le seul point critique de f est $A = (0, -1)$.
- (d) Le seul point critique de g est $B = (0, -1)$.

Question 2 Soit $\varphi(h, k) = h^2 + 3hk + k^2$ et $\psi(h, k) = h^2 - 4hk + k^2$. On a :

- (a) $f(-1 + h, 0 + k) - f(-1, 0) = \varphi(h, k)$.
- (b) $f(0 + h, -1 + k) - f(0, -1) = \varphi(h, k)$.
- (c) $g(-1 + h, 0 + k) - g(-1, 0) = \varphi(h, k)$.
- (d) $g(0 + h, -1 + k) - f(0, -1) = \varphi(h, k)$.

Question 3

- (a) $\varphi(h, k) = (h + k)^2 + hk$, donc f a un minimum local au point critique A .
- (b) $\varphi(h, k) = (h + \frac{3}{2}k)^2 - \frac{5}{4}k^2$, donc f n'a pas de minimum local.
- (c) $\forall h \in \mathbb{R}, \psi(h, h) = -2h^2 \leq 0$ donc g a un maximum sur \mathbb{R}^2 .
- (d) $\forall h \in \mathbb{R}^*, \psi(h, th) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} h^2 > 0$, donc g a un minimum local en B .

Partie II

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 f définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + 2z, x + y + z).$$

On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , et A représente la matrice de l'endomorphisme f dans cette base \mathcal{B} .

On définit les vecteurs $\vec{u} = (0, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

Question 4 On appelle \mathcal{B}' la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 car

- (a) \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas deux à deux colinéaires.
- (b) $\vec{u} + \vec{v} \neq \vec{w}$.
- (c) (\vec{u}, \vec{v}) est libre et $\vec{w} \notin \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
- (d) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.

Question 5 A représente la matrice de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} et A' représente la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . On a :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Question 6 La matrice A définie dans la question précédente est :

- (a) inversible car $\det(A) = 3$.
- (b) inversible car $\det(A) = -1$.
- (c) inversible car les trois colonnes ne sont pas colinéaires.
- (d) non inversible car son déterminant est non nul.

Question 7 La même matrice A est :

- (a) symétrique car elle est inversible.
- (b) symétrique donc de rang 3.
- (c) de rang au moins égal à 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes.
- (d) de déterminant nul et de rang inférieur ou égal à 2.

Question 8 On note C la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' . On a :

(a) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = CA'C^{-1}$.

(c) $A' = CAC^{-1}$.

(d) ${}^tC = C^{-1}$.

Question 9 On a :

(a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\det(C^{-1}) = -\det(C)$.

(d) $\det(C) < 0$.

Question 10 Pour tout λ réel, le déterminant $P(\lambda)$ de la matrice $(A - \lambda I)$ où I désigne la matrice unité dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et A la matrice définie dans les questions précédentes, s'écrit :

(a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$.

(b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}$.

(c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 3$.

(d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$.

Question 11 Le polynôme P défini dans la question précédente :

(a) admet trois racines réelles car tout polynôme de degré n à coefficients réels admet n racines réelles.

(b) n'admet aucune racine réelle.

(c) admet au moins une racine réelle car tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

(d) admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

Question 12 Les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du polynôme P , défini dans les questions précédentes, vérifient, si l'on note $S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $S_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $S_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$:

(a) $S_1 = 3, S_2 = -3, S_3 = \det A = -1$.

(b) $S_1 = 3, S_2 = -\sqrt{2}, S_3 = \det A$.

(c) $S_1 = 3, S_2 = -7, S_3 = 3$.

(d) $S_1 = 3, S_2 = 3, S_3 = 1$.

Partie III

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormale \mathcal{B}_0 . On considère l'endomorphisme f de E de matrice M par rapport à \mathcal{B}_0 et l'endomorphisme g de E de matrice J par rapport à \mathcal{B}_0 et l'on donne les matrices M et J ci-après.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 13

- (a) $M \in O(3)$.
- (b) $M \in SO(3)$.
- (c) $M^2 = I_3$, où I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (d) $M^t M = J$

Question 14

L'application f est une :

- (a) homothétie vectorielle
- (b) isométrie vectorielle c'est à dire un endomorphisme orthogonal
- (c) symétrie vectorielle
- (d) rotation vectorielle

Question 15

- (a) $MJ \in SO(3)$.
- (b) MJ est la matrice d'une rotation dont une mesure de l'angle vaut $+\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$.
- (c) $\text{tr}(MJ) = MJ$
- (d) $MJM = I_3$

Question 16

- (a) $J \in O(3)$.
- (b) l'ensemble des vecteurs fixes de l'application g est une droite vectorielle.
- (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, M + \lambda J \in O(3)$.
- (d) $\exists \lambda \in \mathbb{R}, M + \lambda J \in O(3)$.

Question 17

L'application g est une :

- (a) homothétie vectorielle
- (b) réflexion
- (c) symétrie vectorielle
- (d) rotation vectorielle

PARTIE IV

On cherche les fonctions f définies et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 satisfaisant l'équation suivante :

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$$

où a est un paramètre réel. On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et on appelle F la fonction des variables u, v définie par $F(u, v) = f(x, y)$.

Question 18 :

- (a) f est solution de (E) si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{a}{2}$.
- (b) f est solution de (E) si et seulement si $f(x, y) = a \times (x - y) + g(x + y)$ où g est une fonction de la variable réelle et de classe \mathcal{C}^1 .
- (c) si f est de la forme $f(x, y) = f_1(x - y) + f_2(x + y)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions de la variable réelle et de classe \mathcal{C}^1 , alors f est solution de (E).
- (d) Si $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$, alors f est solution de (E).

On cherche les fonctions f définies et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 satisfaisant l'équation suivante :

$$(E') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et on appelle F la fonction des variables u, v définie par $F(u, v) = f(x, y)$.

Question 19 :

- (a) f est solution de (E') si et seulement si F vérifie $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$.
- (b) f est solution de (E') si et seulement si F vérifie $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.
- (c) Si f est solution de (E'), alors $f(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions de la variable réelle et de classe \mathcal{C}^2 .
- (d) Si f est solution de (E'), alors $f(x, y) = f_1(x + y) \times f_2(x - y)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions de la variable réelle et de classe \mathcal{C}^2 .

Partie V

On considère les fonctions de deux variables f et g définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{x \sin(y)}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, g(x, y) = \frac{x \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } g(0, 0) = 0$$

Question 20

- (a) La fonction f est continue en $(0, 0)$ car les applications partielles ($f_1 : x \mapsto f(x, 0)$) et ($f_2 : y \mapsto f(0, y)$) sont continues en 0.
- (b) f est continue en $(0, 0)$ car pour tout réel t , on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, tx)$ existe.
- (c) f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(x, x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.
- (d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(y^2 - x^2) \sin(y)}{(x^2 + y^2)^2}$

Question 21

- (a) g est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent en $(0, 0)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$
- (c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2 \sin(y)}{(x^2 + y^2)^2}$
- (d) La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .