

*La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.*

**Exercice 1** On considère les sous-espaces vectoriels de  $E = \mathbb{R}^3$   $F$  et  $G$  suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } y = z\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}.$$

1. (a) Donner une famille génératrice de  $F$ .  
 (b) Donner une famille génératrice de  $G$ .  
 (c) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .
2. Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  
 Soit  $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $p(\vec{u})$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .

3. Soit  $q$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$q : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y - z, y, y) \end{cases}.$$

- (a) Montrer que  $q$  est un projecteur de  $E$ .
  - (b) Donner une famille génératrice du noyau  $\ker(q)$ .
  - (c) Vérifier que  $\ker(q)$  et  $G$  sont en somme directe.
  - (d) Montrer que  $\text{Im}(q) = F$ .
  - (e) En déduire <sup>1</sup> que  $poq = q$  et que  $qop = p$ .
4. On pose  $r = p + q$ .  
 (a) Est-ce que  $r$  est un projecteur de  $E$ ?  
 (b) Pour  $n \geq 2$ , calculer  $r^n$  en fonction de  $r$ .
  5. On notera  $I$  l'application identité de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  
 (a)  $\text{Im}(r - 2I) \subset \text{Ker}(r)$   
 (b)  $\text{Im}(r) \subset \text{Ker}(r - 2I)$ .
  6. (a) Ecrire  $I$  comme combinaison linéaire de  $r$  et  $(r - 2I)$ .  
 (b) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(r) \oplus \text{Ker}(r - 2I)$ .  
 (c) Donner l'expression de la projection vectorielle  $h$  sur  $\text{Ker}(r)$  parallèlement à  $\text{Ker}(r - 2I)$ .

<sup>1</sup>Remarque : il n'est pas nécessaire d'avoir calculé  $p$  à la question 2 pour répondre à celle-ci, ni aux suivantes.

**Exercice 2** On cherche les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **continues en 0** et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [1 - f(x)f(y)] f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\heartsuit).$$

Dans les questions **1** à **6**, on suppose que la fonction considérée  $f$  vérifie les conditions précédentes.

1. (a) Montrer que  $f(0) = 0$ .  
(b) Montrer que  $f$  est impaire.
2. (a) Soit  $a$ , un réel quelconque : chercher la valeur de la limite  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ .  
(b) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. (a) Justifier que, pour tout réel  $x : [1 - f^2(x)] f(2x) = 2f(x)$ .  
(b) En déduire que, **si**  $f$  admet une limite, finie **ou** infinie, en  $+\infty$ , **alors** cette limite est nécessairement 0.
4. On note  $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ , l'ensemble des « zéros » de la fonction  $f$ .  
(a) Montrer que  $Z$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  muni de la loi addition  $+$ .  
On rappelle que cela revient à prouver que  $Z$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , puis que :  
 $\forall (a, b) \in Z^2, a + b \in Z$  et  $-a \in Z$ .  
(b) Montrer que si  $x \in Z$ , alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $mx \in Z$ .  
(c) Montrer que si  $x \in Z$ , alors  $\frac{x}{2} \in Z$ .
5. **Dans cette question, on suppose que  $Z = \{0\}$ .**  
(a) Montrer que  $f$  a un signe constant strict sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .  
(b) Soit  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ . Montrer que  $f(x) - f(y)$  est du signe de  $f(x - y)$ .  
On rappelle que  $f$  est impaire.  
(c) En déduire que  $f$  est strictement monotone sur  $]0, +\infty[$ .  
(d) En utilisant la question 3b, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
6. (a) Montrer qu'il existe un réel  $a$  strictement positif dans  $Z$ .  
(b) On fixe donc un réel  $a \in Z \cap ]0, +\infty[$  (c'est possible d'après la question précédente).  
A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur  $n$ , montrer que :  
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{a}{2^n}\right) \in Z.$$
  
Puis montrer que :  
$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \left(\frac{ma}{2^n}\right) \in Z.$$
  
(c) Soit  $x > 0$ , un réel fixé. On définit la suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  par :  
$$u_n = \frac{aE\left(\frac{2^n x}{a}\right)}{2^n},$$
  
où  $E$  désigne la fonction partie entière.  
Déterminer la limite de la suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$ .  
En déduire que  $x$  appartient à l'ensemble  $Z$ .

7. Conclure.

**Exercice 3****I - Etude d'un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^2$** 

On considère  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^2$  défini par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (2x + 3y, x + 2y) \end{cases}.$$

On note  $I = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , l'application identité de  $\mathbb{R}^2$ .

1. (a) Soit  $(x', y')$  fixé dans  $\mathbb{R}^2$  : résoudre l'équation  $f(x, y) = (x', y')$  d'inconnue  $(x, y)$ .  
 (b) Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .  
 On note  $h$ , l'automorphisme réciproque de  $f$  ( $h = f^{-1}$ ). Donner l'expression de  $h(x, y)$ .
2. (a) Vérifier que  $f^2 - 4f + I = 0$ .  
 (b) Montrer que cette égalité permet de retrouver le fait que  $f$  est un automorphisme de  $E$  et une expression de  $h$  en fonction de  $f$  et de  $I$ . Vérifier la cohérence des résultats obtenus avec ceux de la question 1b.
3. (a) Montrer que l'équation  $x^2 - 4x + 1 = 0$  possède deux racines réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  telles que  $\lambda_1 < \lambda_2$ .  
 (b) Montrer que l'ensemble  $\ker(f - \lambda_1 I)$  est une droite vectorielle. On notera  $\vec{v}_1$  le vecteur directeur de cette droite dont la seconde composante est  $-1$  (i.e)  $\vec{v}_1 = (x, -1)$  : trouver  $x$ .  
 De même, on prouverait (inutile de le faire) :  $\ker(f - \lambda_2 I) = \text{vect}(\vec{v}_2)$  avec  $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, +1)$ .  
 (c) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $f^n(\vec{v}_1) = \lambda_1^n \vec{v}_1$ .  
 De même, on prouverait  $f^n(\vec{v}_2) = \lambda_2^n \vec{v}_2$  (inutile de le faire).
4. (a) Vérifier que le vecteur  $(1, 0)$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  : autrement dit, déterminer des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $(1, 0) = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ .  
 (b) En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$ , une expression de  $f^n(1, 0) = (a_n, b_n)$ .  
 (c) Prouver que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont des entiers naturels.

**II - Un peu de géométrie**

Soit  $\mathcal{C}$ , la courbe d'équation  $x^2 - 3y^2 = 1$  (dans le plan muni d'un repère orthonormal).

Quelle est la nature de cette courbe ? On donnera **tous** ses éléments caractéristiques, et on tracera l'allure générale de  $\mathcal{C}$ . Sur ce schéma, on fera apparaître ses éléments caractéristiques.

*Le but de ce problème est de déterminer les points à **coordonnées entières** (dans  $\mathbb{Z}^2$ ) situés sur la courbe  $\mathcal{C}$ . Les variables  $x$  et  $y$  apparaissant, dans l'équation de  $\mathcal{C}$ , uniquement sous forme de carrés, il suffit de trouver les  $(x, y)$  avec  $x$  et  $y$  entiers naturels : en effet, si  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  est solution, les trois*

autres couples  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$  et  $(-x, -y)$  sont également solutions, et un de ces quatre couples est à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ .

Conséquence : on cherche à résoudre l'équation  $x^2 - 3y^2 = 1$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  (on parle d'équation diophantienne<sup>2</sup>).

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de cette équation : ainsi  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$ .  
On classe les éléments de  $\mathcal{S}$  par ordre d'abscisse croissante :  $\mathcal{S} = \{\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \dots, \vec{z}_n, \dots\}$  avec  $\vec{z}_0 = (1, 0)$ ,  $\vec{z}_k = (x_k, y_k)$  et  $1 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots$ .

### III - Recherche des éléments de $\mathcal{S}$

1. Déterminer  $\vec{z}_1$ .
2. L'ensemble  $\mathcal{S}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  ?
3. On rappelle que la fonction  $f$  a été introduite à la première partie.
  - (a) Vérifier  $f(\vec{z}_0) = \vec{z}_1$ .
  - (b) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}$  est stable par  $f$  (i.e)  $f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ .
4. L'objet de cette question est de prouver que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(\vec{z}_n) = \vec{z}_{n+1}$ .  
On raisonne par l'absurde : on suppose donc que l'ensemble  $\mathcal{D} = \{k \in \mathbb{N} \mid \vec{z}_{k+1} \neq f(\vec{z}_k)\}$  est non vide.
  - (a) Justifier l'existence de  $i = \min(\mathcal{D})$ , le plus petit élément de l'ensemble  $\mathcal{D}$ .  
Peut-on avoir  $i = 0$  ?
  - (b) On rappelle que  $h$  est la réciproque de la fonction  $f$  (voir la première partie).  
Déterminer  $h(\vec{z}_{i+1})$  en fonction de  $x_{i+1}$  et  $y_{i+1}$ .
  - (c) Montrer que  $h(\vec{z}_{i+1})$  appartient à  $\mathcal{S}$ .  
On rappelle que les éléments de  $\mathcal{S}$  sont des couples d'entiers positifs.
  - (d) Prouver l'existence d'un entier  $k \in \{1, 2, \dots, i\}$  tel que  $h(\vec{z}_{i+1}) = \vec{z}_k$ .
  - (e) Conclure.
5. Décrire  $\mathcal{S}$ .  
Cet ensemble est-il infini ? borné ?

---

<sup>2</sup>Diophante(+150/+350!) : a vécu à Alexandrie-Alexandra. Auteur de plusieurs ouvrages traitant de recherche de solutions entières d'équations à plusieurs variables. Il est aussi un des premiers à introduire le symbolisme que nous utilisons dans l'écriture des équations.