La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 QUESTIONS DE COURS - **Aucune preuve n'est demandée, sauf pour (3b)**.

1. Si Q est un nombre complexe et n un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $1 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n = \sum_{k=0}^{n} Q^k = \ldots ?$
   (b) $1 - Q + Q^2 - \cdots + (-1)^n Q^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q^k = \ldots ?$
   (c) Si $0 \leqslant p \leqslant n$, $\sum_{k=p}^{n} Q^k = ?$
2. Rappeler précisément la formule du binôme de Newton.
3. (a) Recopier et compléter :
   $$\sum_{k=0}^{n} k = \ldots \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \ldots.$$
   (b) Application : montrer qu'en calculant $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$ de deux façons on peut trouver une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 2

1. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{j-i}$.
2. Rappeler la formule de Pascal et simplifier au maximum, pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right).$$
3. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k3^k$.
   (a) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$:
   $$S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)3^k.$$
   En déduire la valeur explicite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k3^k$.
   (b) Une autre méthode : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left(n - \frac{3}{2}\right) 3^n$: simplifier $u_{n+1} - u_n$. En déduire la valeur de S_n.
   (c) Encore une autre méthode : déterminer la valeur de S_n en remarquant $k = \sum_{i=1}^{k} 1$.
   (d) Et une dernière méthode : pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $P(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \cdots + x^n$.

i. Simplifier $P(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

ii. Calculer le nombre dérivé $P'(x)$ de deux façons différentes pour $x > 1$.

iii. En déduire une expression explicite de S_n.

Exercice 3 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + (m+1)\,z \\ 2x + 3y - mz \\ 2x + my + (6+3m)z \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'ensemble image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m = 0$.
   (a) Calculer $f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?
   (b) Résoudre le système $f_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_0 ?
   (c) A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_0 ?
2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.
   (a) Pour $m \notin \{0,1\}$, montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?
   (b) Que dire de f_1 ?

Exercice 4

1. Déterminer un polynôme P, de degré 2 à coefficients réels, dont le coefficient dominant (i.e le coefficient du terme de plus haut degré) est égal à 1 (on dit que le polynôme est unitaire) et qui vérifie
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x)P(x+1) = x^4 + x^2 + 1.$$
2. Simplifier alors $P(x+1) - P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une forme simplifiée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1}.$$
4. Préciser la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_n)$.

Exercice 5 On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et, pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. On est donc assuré que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, finie ou infinie. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que cette limite est infinie.
3. (a) Calculer u_1 et u_2 et vérifier qu'on a : $u_1 \geqslant 1$ et $u_2 \geqslant 2$.

   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout $n \geqslant 0$,
   $$u_n \geqslant n.$$
   Quel résultat cette inégalité permet-elle de retrouver ?
4. (a) Exprimer uniquement en fonction de u_n, la quantité (pour tout $n \in \mathbb{N}$) :
   $$\frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1}.$$
   (b) En déduire une expression simplifiée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$$
   et préciser sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 Soit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \longmapsto & f(p,q) = 2^p(2q+1) \end{array} \right.$

1. Montrer, par récurrence **forte** sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une solution $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ à l'équation $f(p,q) = n$. Conséquence pour f ?
   <u>Indication</u> : si N est un entier non nul et pair, alors $\frac{N}{2}$ est un entier plus petit que $N-1$.
2. Prouver que f est une bijection.
3. Construire, à l'aide de f, une application bijective $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
4. On dispose donc maintenant d'une bijection g de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.
   On définit alors l'application $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ par
   $$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b,c) & \longmapsto & h(a,b,c) = g\left(g\left(a,b\right),c\right) \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que h est bijective.

   (b) Déterminer $h^{-1}(2023)$.
5. Construire une application bijective $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$.