La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
$$\tan(a+b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$
2. Si q est un nombre complexe et n un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots ?$
   (b) $1 - q + q^2 - \cdots + (-1)^n q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k = \ldots ?$
   (c) $1 + 2q^2 + 4q^4 + 8q^6 + \cdots + 2^n q^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k q^{2k} = \ldots ?$
3. Rappeler la définition **et** l'expression des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (où $n \geqslant 1$).
4. Si θ est un réel, factoriser :
$$1 + e^{i\theta} = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \ldots$$
   puis factoriser
$$1 + \cos(\theta) = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(\theta) = \ldots$$

Exercice 2

1. Déterminer les racines carrées de $\omega = -8 - 6i$.
2. On considère le polynôme P défini par
$$P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + 5(1+i)X - 6(1+i).$$
   (a) Ce polynôme P admet une racine **réelle** r : la déterminer.
   (b) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(X) = (X - r)Q(X)$.
   (c) Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 3 Soit f, la fonction de la variable complexe z définie par
$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition E de f (i.e la plus grande partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle la fonction f est définie). Ainsi, $f : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z}{z^2+2z+2} \end{array} \right.$
2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Que vaut $1 + j + j^2$?
   (b) Calculer et simplifier $f(j)$.
   (c) Résoudre l'équation « $f(z) = -j^2$ », et exprimer les solutions z à l'aide de j.
3. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in E$: « $f(z) = \dfrac{1}{4}$ ».
   On donnera les solutions sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle.
   (b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Soit un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$: en fonction de ω, déterminer le nombre de solutions z dans E de l'équation « $f(z) = \omega$ ».
   (b) L'application f est-elle surjective ?
5. A quelle condition a-t-on $f(z) \in \mathbb{R}$?
   Quel ensemble a-ton ainsi déterminé : $f(\mathbb{R})$ ou $f^{-1}(\mathbb{R})$?

Exercice 4

1. (a) Prouver que, si x et y sont des réels de l'intervalle $[0,1]$, alors
$$x+y \leqslant 1+xy.$$
   (b) En déduire, si $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{2n-k} \leqslant 2^n \left(1+t^{2n}\right).$$
   (c) A l'aide des résultats précédents, montrer : pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$(1+t)^n (1+t^n) \leqslant 2^n \left(1+t^{2n}\right).$$
2. Montrer, pour tous réels positifs a et b et entier naturel n,
$$(a+b)^n (a^n+b^n) \leqslant 2^n \left(a^{2n}+b^{2n}\right).$$

Exercice 5

1. Résultats préliminaires
   (a) Rappeler ce qu'est l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ (pas de preuve attendue ici).
   (b) **Montrer** alors que, pour tout $(z,u) \in \mathbb{C}^2$, on a : $|z+u| \geqslant |z|-|u|$ (ici, une preuve est attendue).
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|>1$ et $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer :
$$a>b \Longrightarrow |z^a| > \left|z^b\right|.$$

Soit n un entier non nul, et soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite croissante de $n+1$ réels positifs avec $a_n \neq 0$:
$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \qquad \text{avec } a_n \neq 0.$$
On considère l'équation
$$(E) \quad : \quad a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0.$$
On se propose de démontrer que les solutions complexes de (E) ont toutes un module inférieur ou égal à 1.
On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{et} \quad A(z) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1}-a_k)\, z^k.$$

2. Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$|A(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\, |z|^k + a_0.$$
3. En déduire que, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|>1$, on a :
$$|A(z)| \leqslant a_n |z|^n.$$
4. En développant $(z-1)\,P(z)$, montrer :
$$|(z-1)\,P(z)| \geqslant a_n \left|z^{n+1}\right| - |A(z)|.$$
5. Déduire de ce qui précède que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z|>1$ alors
$$|(z-1)\,P(z)| \geqslant a_n |z|^n (|z|-1).$$
6. Conclure.