La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Compléter (pas de preuve exigée) **sur la feuille jointe à ce sujet (à glisser dans votre copie)** :
   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$
   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$
   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$
   (d) $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (e) $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (f) $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (g) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$
   (h) Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
   $$\tan(a+b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$
   (i) $\forall x \in \ldots$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) = \ldots$
   (j) Donner les valeurs exactes de :
   $$\text{Arctan}(-1) = \ldots\ldots, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$$
2. (a) Montrer, sous réserve d'existence, l'égalité suivante : $\cos(2x) = \dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$.
   (b) Comparer alors les deux nombres $A = \text{Arccos}\left(\dfrac{5}{13}\right)$ et $B = 2\text{Arctan}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
3. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle :
   $$2\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(2x) = \pi.$$
4. On pose $f(x) = 2\text{Arctan}(e^x) - \text{Arctan}(\text{sh}(x))$: quel est l'ensemble de définition de f ?
   Pour quels x peut-on calculer $f'(x)$? Simplifier $f'(x)$ dans ce cas.
   Conclusion ?

Exercice 2 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Donner les développements limités d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque $x \to 0$ (notés $\text{DL}_n(0)$) des quantités suivantes (où α désigne une constante réelle) :
   (a) $\text{DL}_{\mathbf{3}}(0)$ de
   $$\tan(x) \quad \textbf{et} \quad (1+x)^\alpha \quad \textbf{et} \quad \sqrt{1+x}.$$
   (b) $\text{DL}_{\mathbf{5}}(0)$ de
   $$\text{sh}(x) \ \textbf{et} \ \text{ch}(x) \ \textbf{et} \ \sin(x) \ \textbf{et} \ \cos(x) \ \textbf{et} \ \ln(1+x) \ \textbf{et} \ \frac{1}{1+x} \ \textbf{et} \ \arctan(x) \ \textbf{et} \ e^x.$$
   Les réponses doivent être écrites sur la feuille jointe à ce sujet (ne pas oublier de la glisser dans votre copie).
2. Donner un équivalent en $x = 0$ des deux fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$.
   (b) $g(x) = \dfrac{\cos(\text{sh}(x)) - 1}{\tan^2(x)}$.

3. Déterminer le développement limité de $f(x) = \exp\left(\cos(x) - \sqrt{1+x}\right)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 2.
4. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x} - \text{ch}(x)}{x}$.
   (a) Rappeler le développement limité de $\sqrt{1+u}$, à l'ordre 3 lorsque $u \mapsto 0$.
   (b) Prouver que f est prolongeable par continuité en $x = 0$, puis, ainsi prolongée, que f est dérivable en $x = 0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de 0.

Exercice 3 APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$1.\quad I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2 - 6x + 9} \qquad 2.\quad I_2 = \int_{-2}^1 \frac{x}{x^2 - 6x + 8}\mathrm{d}\,x \qquad 3.\quad I_3 = \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2 - 4x + 5}$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\ln(2)} x\text{ch}(x)\mathrm{d}\,x.$$

3. Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\mathrm{d}x$.
4. Calculer l'intégrale $L = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$ à l'aide du changement de variable $t = e^x$.
5. Calculer l'intégrale $M = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = t^3 + 1$.

Exercice 4

1. Quelques résultats préliminaires
   (a) Pour tout $x > 0$, simplifier $\text{ch}\left(\ln(x)\right)$ et $\text{sh}\left(\ln(x)\right)$.
   (b) On définit la fonction th par
   $$\text{th}(t) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}.$$
   Quel est l'ensemble de définition de la fonction th ?
   Justifier que la fonction th est dérivable sur cet ensemble puis calculer $\text{th}'(t)$. On attend deux expressions de cette dérivée : la première uniquement en fonction de $\text{th}(t)$, la seconde uniquement en fonction de $\text{ch}(t)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par
   $$\text{pour tout réel } x > 0,\ f_n(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{\text{ch}^n(t)}\,\mathrm{d}t.$$
   Justifier l'existence de ces $f_n(x)$ pour tout réel $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Calculer $f_0(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   (b) A l'aide du changement de variable $u = \text{sh}(t)$, calculer $f_1(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   (c) Calculer $f_2(x)$ pour tout réel $x > 0$.
4. (a) Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   Prouver que la fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et préciser ${f_n}'(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) En utilisant la fonction f_1, établir la relation
   $$\text{pour tout } x > 0, \quad \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

(c) En déduire l'égalité
$$\arctan\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

(d) Donner une expression simplifiée de $\varphi(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$ lorsque $x<0$.

Tracer alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \varphi(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$.

(e) Peut-on prolonger la fonction φ par continuité en 0 ? Si oui, ainsi prolongée, la fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $x>0$, exprimer $f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ uniquement en fonction de $f_n(x)$.

(b) Montrer, pour tout réel t : $\mathrm{ch}(t) \geqslant 1 + \frac{t^2}{2}$.
En déduire, pour tout $n \geqslant 0$: $\mathrm{ch}^n(t) \geqslant 1 + n\frac{t^2}{2}$.

(c) Si $x>1$ et $n \geqslant 1$, justifier :
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\ln(x)\right).$$

(d) En déduire, pour tout $x>0$ fixé, la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x))$.

6. (a) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_0(x))$?

(b) Si $n \geqslant 1$: justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x))$ existe et est finie.
Que peut-on affirmer sur $\lim\limits_{x\to 0^+}(f_n(x))$?

7. A l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x>0$:
$$f_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1} f_n(x) + \frac{1}{n+1}\,\frac{\mathrm{sh}(\ln(x))}{\mathrm{ch}^{n+1}(\ln(x))}.$$

8. Dans cette question, on suppose $\boxed{x = \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$.

(a) Simplifier $\dfrac{\mathrm{sh}(\ln(x))}{\mathrm{ch}^{n+1}(\ln(x))}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n f_n(x) f_{n+1}(x)$: simplifier $u_{n+1} - u_n$.

(c) Soit la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x)}{2^k}$. Calculer et simplifier S_n.

(d) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(x)} \frac{2\mathrm{ch}t}{2\mathrm{ch}(t)-1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = e^t$.

(e) En déduire :
$$S_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{(2\mathrm{ch}(t)-1)\,2^n\mathrm{ch}^n(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(f) Enfin, en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.