PCSI$_1$-PCSI$_2$ **DS n°04 - SAMEDI 07 JANVIER 2023 - 3 heures** 2022-2023

***La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.***

**Exercice 1** COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Donner les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) $(E_1)$ « $2y'' + 5y' - 3y = 6$ ».
   (b) $(E_2)$ « $y'' + 6y' + 9y = 8e^x$ ».
   (c) $(E_3)$ « $y'' + 4y' + 5y = \cos(x)$ ».
   (d) **Combien** y a-t-il de solutions de $(E_3)$ vérifiant (respectivement) la condition
      i. $y(0) = 2022$ et $y'(0) = 2023$ ?
      ii. $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$ ?
2. Donner les solutions $y : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante et vérifiant $y(1) = 2$ :
$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$
3. Soit $m$, un paramètre réel. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :
$$\begin{cases} x + my + z = m \\ mx + y + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}.$$
   (a) Déterminer pour quelles valeurs de $m$ le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer, et le résoudre uniquement dans ce cas (avec les formules de Cramer).
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions lorsque le système $(\mathcal{S})$ n'est pas de Cramer.

**Exercice 2**

1. Soit $I = ]-\infty, 1[$ et la fonction $a : I \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in I,\ a(x) = \frac{x}{1-x}.$$

(Bruxelles-BELGIQUE)

   Déterminer toutes les primitives de la fonction $a$ sur l'intervalle $I$.
2. Résoudre, sur $I$, l'équation différentielle
$$(1-x)y' + xy = 0 \quad (H).$$
   On simplifiera au maximum l'expression des fonctions solutions.
3. Résoudre, sur l'intervalle $I$, l'équation différentielle
$$(1-x)y' + xy = e^x \quad (E)$$
4. (a) Pour tout réel $k$, montrer qu'il existe une unique fonction $f_k : I \to \mathbb{R}$ solution de $(E)$ sur $I$ telle que $f_k(0) = k$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de $f_k$.
   (b) Vérifier que, pour tout réel $k$, les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0, sont toutes parallèles entre elles.

(c) Calculer le développement limité de $f_k(x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$.
Puis, parmi toutes les courbes $\mathcal{C}_k$, déterminer celles qui possèdent un point d'inflexion[1] en $x = 0$. Déterminer et tracer l'allure d'une telle courbe au voisinage de $x = 0$.

5. On note $T_k$ la tangente au point $x = -1$ de $\mathcal{C}_k$.
Donner une équation cartésienne de $T_k$, puis prouver que toutes les droites $T_k$ (pour $k \in \mathbb{R}$) sont concourantes en un point que l'on déterminera.

## Exercice 3

On note $I = I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $M$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

### I - Une première méthode de calcul de $M^n$

1. Soit la matrice $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.
Calculer $A^2$, $A^3$ puis en déduire une expression simple de $A^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Exprimer $M$ en fonction de $A$ et de $I$ puis en déduire[2] qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + \alpha_n A.$$
3. Vérifier que la suite $\alpha$ est arithmético-géométrique. Calculer[3] son terme $\alpha_n$ en fonction de $n$ et en déduire l'expression de $M^n$ pour $n \geqslant 0$.
4. Justifier que $M$ est inversible, et calculer son inverse $M^{-1}$.
Vérifier que l'expression trouvée en **(3.)** est encore valable avec $n = -1$.

### II - Une deuxième méthode de calcul de $M^n$

On définit la matrice $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$

1. Calculer $J^2$ puis $J^n$ pour tout entier naturel non nul $n$.
La matrice $J$ est-elle inversible ?
2. Pour tout entier naturel $n$ non nul : déterminer une expression de $M^n$ en fonction de $n$, $I$ et $J$. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question **(3.)** de la partie **I**.

### III - Une troisième méthode de calcul de $M^n$

1. On définit la fonction $P_M$ sur $\mathbb{R}$ par $P_M(x) = \det(xI - M)$.

   (a) Calculer $P_M(x)$ et montrer que la fonction $P_M$ est polynomiale de degré 3.

---

1. On rappelle qu'un tel point est caractérisé par la tangente qui «traverse» la courbe en ce point.
2. Un raisonnement par récurrence est fortement conseillé ici !
3. On rappelle qu'on peut commencer par chercher une constante $C$ telle que la suite $(\alpha_n - C)_{n\geqslant 0}$ soit géométrique.

(b) Résoudre $P_M(x) = 0$ : on notera $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les deux solutions avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

(c) Pour $i \in \{1, 2\}$, justifier **sans calculs** que le système homogène, noté $(\mathcal{S}_i)$ de matrice associée $M - \lambda_i I$, admet une infinité de solutions.

(d) Résoudre le système $(\mathcal{S}_1)$ et en donner une solution notée $X_1$ de la forme $\begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$ où les $\bullet$ sont des entiers relatifs (à préciser).

(e) Montrer que les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du système $(\mathcal{S}_2)$ s'écrivent sous la forme $yX_2 + zX_3$ où $X_2 = \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$, et où les $\bullet$ sont des entiers relatifs (à déterminer).

2. Soit $P = (X_1|X_2|X_3)$, la matrice dont les colonnes sont les $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$.

   (a) Montrer que $P$ est inversible.

   (b) Que vaut $P^{-1}P$ ? Sans calculer $P^{-1}$, en déduire $P^{-1}X_1$, $P^{-1}X_2$ et $P^{-1}X_3$.

   (c) Que valent $MX_1$, $MX_2$ et $MX_3$ ?
   En déduire $MP$ puis $D = P^{-1}MP$, ceci sans calculer $P^{-1}$.

   (d) Calculer $D^n$ puis en déduire une expression de $M^n$ (on ne demande pas le calcul).

## IV - Une dernière méthode de calcul de $M^n$ ?

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0$, $v_0$ et $w_0$ réels fixés et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -7u_n & & & -8 & w_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n & & & + & 5w_n \end{array} \right. .$$

On pose alors $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $Y_{n+1}$ en fonction de $M$ et de $Y_n$, puis $Y_n$ en fonction de $M$ et de $Y_0$.
2. On pose $r_n = u_n + w_n$. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire $r_n$ en fonction de $n$, $u_0$ et $w_0$.
3. Soit $t_n = u_n + 2v_n$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
4. Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+2} + 2u_{n+1} = au_n$.
5. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = \frac{u_0 - u_1}{4}(-3)^n + \frac{3u_0 + u_1}{4}.$$
6. En déduire $v_n$ et $w_n$ en fonction $n, u_0, v_0$ et $w_0$. Ce résultat permet-il de retrouver $M^n$ ?

**Exercice 4**

1. On se propose de résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :
$$\boxed{(E) \text{ « } x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x} \text{ »}}.$$
Soit $y$, une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ : on définit alors la fonction $z$ sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ y(x) = z(\ln x), \text{ autrement dit } \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t).$$
   (a) Montrer que $y$ est solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(G)$ suivante
$$\boxed{(G) \text{ « } z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{3t} - e^{-t} \text{ »}}.$$
   (b) Résoudre cette équation différentielle $(G)$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Conclure.

2. On se propose maintenant de déterminer toutes les fonctions $f$ vérifiant le problème suivant, noté $(P)$ :
$$\boxed{\text{«}f \text{ est définie et dérivable sur } ]0, +\infty[ \text{ et, pour tout } x \in ]0, +\infty[,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\text{»}}.$$
Soit $f$, une solution de ce problème $(P)$.
   (a) Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que $f$ est une solution de l'équation différentielle $(E)$.

   (c) **Conclure**.

**Exercice 5** Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $d_{i,j}$ le nombre de diviseurs communs à $i$ et $j$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit alors la matrice $D = ((d_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On se propose de calculer $\Delta = \det(D)$, le déterminant de la matrice $D$.

1. Calculer $\Delta$ si $n = 2$ puis si $n = 3$.
2. Pour tout $(p, q) \in [\![ 1 ; n ]\!]^2$, on pose
$$a_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q \text{ divise } p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
et on note $A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   (a) Pour $(i, j) \in [\![ 1 ; n ]\!]^2$, compléter les quatre « ?» dans l'égalité suivante :
$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{?,?} \times a_{?,?}.$$
   (b) En déduire la valeur de $\Delta$.