La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 On définit, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \quad \text{et} \quad B_n = A_n + \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1. Montrer que les suites $(A_n)_{n\geqslant \mathbf{3}}$ et $(B_n)_{n\geqslant \mathbf{3}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure concernant les suites $(A_n)_{n\geqslant \mathbf{0}}$ et $(B_n)_{n\geqslant \mathbf{0}}$?
3. (a) Montrer :
$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad A_{n+2} - A_{n+1} + \frac{1}{4}A_n = \frac{1}{2}.$$
Compléter alors la réponse de la question **(2)**.
   (b) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\geqslant \mathbf{0}}$ vérifiant
$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0 \quad (*).$$
   (c) Montrer qu'il existe une constante D, à déterminer, telle que la suite $(v_n)_{n\geqslant \mathbf{0}}$, définie par $v_n = A_n - D$, vérifie la relation $(*)$.
   (d) En déduire une expression explicite de A_n pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(E_n) \quad x + e^{nx} = 2$$

et on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + e^{nx} - 2.$$

1. Montrer que (E_0) admet une unique solution x_0 et préciser sa valeur.
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution noté x_n, et justifier que $x_n \in [0,1]$.
3. Déterminer, en fonction de x le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On notera ℓ sa limite.
5. Soient $n \geqslant 1$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + e^{ny} = 2$, exprimer y en fonction de x.
6. Déterminer la valeur de ℓ, puis un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3

Première partie - Intermède culturel

Soit $\mathcal{C}$, la courbe d'équation «$x^2 - 2y^2 = 1$» : il s'agit donc de l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) (dans le plan muni d'un repère orthonormal) vérifiant $x^2 - 2y^2 = 1$. Cette courbe est une conique appelée «**hyperbole**» dont voici l'allure :

$$\mathcal{C} \text{ d'équation } «x^2 - 2y^2 = 1»$$

Repasser cette courbe au crayon rouge.

Deuxième partie

On désire prouver qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $(0 + 1 + 2 + \cdots + n)$ soit un carré parfait, autrement dit une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = p^2$.

1. (a) Montrer qu'un couple (n, p) vérifie la condition précédente si, et seulement si le point de coordonnées $(2n + 1, 2p)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$.

   Ainsi, le problème posé revient à prouver l'existence d'une infinité de points de $\mathcal{C}$ dont les coordonnées sont entières et positives, l'abscisse étant impaire et l'ordonnée paire.

   (b) Montrer que, si un point de coordonnées entières $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est sur $\mathcal{C}$, alors nécessairement x est un nombre impair, et y est un nombre pair.

   Indication : on commencera par établir le résultat bien connu suivant :

   « pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$, les entiers N^2 et N ont la même parité ».

   Conséquence ?

2. On définit deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{cases}.$$

   Dans cette question, il n'est pas demandé de trouver une expression explicite des termes x_k et y_k.

   (a) Calculer x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3. Présenter les résultats dans un tableau du type

$k =$	0	1	2	3	4
$x_k =$	1				577
$y_k =$	0				408

   (b) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point de coordonnées (x_k, y_k) est sur $\mathcal{C}$.

   (c) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_k > y_k \geqslant k.$$

   En déduire les limites des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. Le problème posé au début de cette partie est-il résolu ?

Troisième partie

Dans cette partie, on étudie plus précisément les suites introduites dans la partie précédente.

Pour répondre aux questions **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4a)** et **(4b)**, il n'est pas nécessaire de connaître les expressions des termes x_k et y_k (ces expressions ne sont demandées qu'aux questions **(4c)** et **(5a)**).

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_k = \dfrac{x_k}{y_k}$ est bien définie.
2. Montrer[1] que cette suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{2}$.

1. Indication : on rappelle que (x_k, y_k) sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{C}$.

3. (a) Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\left|r_k - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2y_k^2}.$$
   (b) Le rationnel r_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-N} près : que peut-on dire sur N ?

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k = x_k + y_k\sqrt{2}.$$
   (b) Développer et simplifier $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.
   En déduire, directement, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k = x_k - y_k\sqrt{2}.$$
   (c) En déduire les expressions de x_k et de y_k.

5. (a) En revenant à la définition initiale des suites, montrer que les suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(y_k)_{k\geqslant 0}$ sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux. Retrouver alors les expressions de ces deux suites obtenues à la question précédente.
   (b) Première application : retrouver, avec ces expressions, la valeur de la limite $\lim\limits_{k\to+\infty}(r_k)$.
   (c) Seconde application : prouver que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor (3+2\sqrt{2})^k \right\rfloor$, la partie entière de $(3+2\sqrt{2})^k$, est un entier impair.

Exercice 4

1. Résultats préliminaires

   (a) On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par :
$$\text{pour tout } x \in [0,\pi], \quad f(x) = x + \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x - \sin(x).$$
   Dresser les tableaux de variations de ces deux fonctions sur $[0, \pi]$. Représenter leurs courbes simultanément dans un même repère, dans lequel on aura également placé leurs tangentes aux bords (i.e en $x = 0$ et $x = \pi$) et la droite d'équation «$y = x$».
   (b) Justifier que, pour tout $x \in [0, \pi]$: $\sin(x) \leqslant x$. Puis montrer que $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.
   Quel encadrement de $g\,(x)$ en déduit-on ?

2. Soit un réel $\alpha \in]0, \pi]$. On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \sin(u_n).$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \pi]$, et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ est sa limite, justifier que $\alpha \leqslant \ell \leqslant \pi$.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.

3. On désire étudier la vitesse de convergence de la suite u. On définit donc la suite ε par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = \ell - u_n.$$
   (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} = g(\varepsilon_n)$.

   (b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n : pour tout entier $n \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \sqrt{6}\left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{6}}\right)^{3^n}.$$

4. *Cette question **(4)** et la suivante **(5)** sont indépendantes.*

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\varepsilon_k)$.

   (a) Montrer : pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(u_k)$.

   (b) En déduire une expression simple de S_n, puis la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

5. Dans cette question, on désire déterminer toutes les fonctions h, définies et continues sur le segment $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant $h = h \circ f$, autrement dit :
$$\forall x \in [0, \pi], \quad h(x) = h(x + \sin x).$$
   On suppose qu'il existe une fonction h répondant à cette question.

   (a) On définit alors la suite v par, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = h(u_n)$.
   Justifier que cette suite converge : que vaut sa limite ?

   (b) Montrer que la suite $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ est constante, et en déduire une autre expression de sa limite.

   (c) Montrer que la fonction h est constante sur le segment $[0, \pi]$.

   (d) Conclure.