***La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.***

## PROBLEME

Le Père Noël doit distribuer $n$ cadeaux deux à deux distincts à $n$ enfants (avec $n \in \mathbb{N}^*$). En supposant que le Père Noël dépose les paquets au hasard, on souhaite étudier le nombre $D_n$ de distributions qui font qu'aucun enfant n'obtienne son cadeau.

Modélisation possible : $D_n$ correspond donc au nombre de bijections $f : [[1, n]] \to [[1, n]]$ **sans point fixe**, i.e le nombre de permutations **sans point fixe** (*dérangements*) de l'ensemble à $n$ éléments $[[1, n]]$.

On rappelle que, pour $k \in [[1, n]]$ et $f : [[1, n]] \to [[1, n]]$ bijection, $k$ est un point fixe de $f$ si $f(k) = k$. Par conséquent $f$ est sans point fixe si, pour tout $k \in [[1, n]]$, $f(k) \neq k$.

Représentation : une bijection $f$ peut se représenter à l'aide d'une matrice à 2 lignes. Par exemple, avec $n = 6$, l'application identité

| $k =$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(k) =$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |

(tous fixes) s'écrira $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

L'application

| $k =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(k) =$ | 5 | 3 | 6 | 1 | 2 | 4 |

(sans point fixe) s'écrira $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

L'application

| $k =$ | 1 | 2 | **3** | 4 | **5** | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(k) =$ | 2 | 4 | **3** | 6 | **5** | 1 |

(deux points fixes) s'écrira $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 2 & 4 & \mathbf{3} & 6 & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix}$.

### I - Recherche d'une expression de $D_n$

1. Que valent $D_1$ ? $D_2$ ? $D_3$ ? Justifier. Tout schéma est le bienvenu.
2. Soit $f : [[1, n+2]] \to [[1, n+2]]$, une bijection sans point fixe. On note $f(n+2) = i_0$.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de $i_0$ ?
   (b) La valeur de $i_0$ étant fixée, combien existe-t-il de $f$ telle que $f(i_0) = n+2$ ?
   (c) La valeur de $i_0$ étant fixée, combien existe-t-il de $f$ telle que $f(i_0) \neq n+2$ ?
   (d) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$ :
   $$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n).$$
3. Que valent $D_4$ et $D_5$ ?
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = D_{n+1} - (n+1)D_n$.
   Prouver que la suite $v = (v_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique. En déduire :
   $$\forall n \geqslant 1,\ D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}.$$
5. Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$ :
   $$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

### II - Une suite de polynômes associés et une autre façon de calculer les $D_n$

On pose, pour tout $x \in I = ]-\infty, 1[$ : $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

1. (a) Montrer que $g$ est une solution de l'équation différentielle : « $(1-x)y' = xy$ ».

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que
   $$\forall x \in I, \quad g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-x}}{(1-x)^{n+1}}.$$
   Au passage, on aura établi une relation du type
   $$P_{n+1} = (a - X)P'_n + (X + b)P_n$$
   où $a$ et $b$ sont des constantes (à déterminer) dépendant éventuellement de $n$.
   Préciser les polynômes $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

   (c) Montrer que $P_n$ est de degré $n$ et est unitaire (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n = P_n(1)$ : déterminer une relation entre $\varphi_{n+1}$ et $\varphi_n$ puis une expression simple de $\varphi_n$ en fonction de $n$.

2. (a) En appliquant la formule de Leibniz à l'ordre $n$ à une certaine égalité, justifier que, pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :
   $$(1-x)g^{(n+1)}(x) - (x+n)g^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x) = 0.$$

   (b) En déduire une relation entre les polynômes $P_{n+1}$, $P_n$ et $P_{n-1}$.

   (c) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$ : $P'_n = nP_{n-1}$.

3. (a) Soit un nombre complexe $\alpha \neq 1$ et un entier $n \geqslant 1$. Justifier l'implication :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} P_n(\alpha) & = & 0 \\ P'_n(\alpha) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} P_{n-1}(\alpha) & = & 0 \\ P'_{n-1}(\alpha) & = & 0 \end{array}\right.$$

   (b) En déduire que toutes les racines de $P_n$ sont simples (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

4. On pose $\delta_n = g^{(n)}(0)$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\delta_n = D_n.$$
   Désormais, on pose, <u>par convention</u> : $D_0 = \delta_0$.

5. (a) Montrer, pour tout entier $k \in [[0,n]]$ : $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$.

   (b) Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} X^k.$$

   (d) A l'aide de la question précédente, montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!.$$

   (e) Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$, la somme des racines de $P_n$ est nulle.

6. (a) Justifier que $g(x)$ admet un développement limité à tout ordre en $x = 0$.

   (b) Calculer le développement limité de $g(x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$.
   Retrouver la valeur de $D_3$.

7. Plus généralement, on désire retrouver l'expression de $D_n$ en fonction de $n$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donner directement l'expression du coefficient $c_n$ du monôme de degré $n$ du polynôme produit $C(X) = A(X)B(X)$ en fonction des $a_k$ et $b_k$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n$).

(b) A l'aide d'un développement limité à l'ordre $n$ en $x = 0$, retrouver une expression de $D_n$.

8. **Une dernière formule sur les polynômes $P_n$**

   (a) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ :
   $$Q(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}.$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$$
   Quel résultat déjà obtenu cette formule permet-elle de retrouver ?

## III - Calcul d'une probabilité limite

On rappelle qu'on a établi, en partie I : pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

1. Justifier que le nombre de façons différentes, pour le Père Noël, d'effectuer sa distribution (au hasard) est $n!$.
   En supposant que toutes les tournées possibles sont équiprobables, la probabilité que le Père Noël se trompe en ne distribuant le bon cadeau à aucun des enfants est $p_n = \dfrac{D_n}{n!}$.
   On désire étudier la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   Pour $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = e^x \times \left( \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-x)^k}{k!} \right)$.
2. Calculer et simplifier l'expression de $f'_n(x)$ (nombre dérivé de la fonction $f_n$ au point $x$).
3. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$ :
   $$|f'_n(x)| \leqslant \frac{e}{n!}\ .$$
4. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$ :
   $$|f_n(1) - f_n(0)| \leqslant \frac{e}{n!}\ .$$
5. Conclure.