La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Applications du cours - questions indépendantes.

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ on définit les sous-espaces
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}.$$
   (a) Donner une base de F et une base de G.
   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   (c) On note p le projecteur sur F selon G : pour tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$, préciser l'expression de $p(\vec{v})$ en fonction de x, y et z.
2. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, on définit les ensembles
$$F = \{P \in E \mid P(1) + P'(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\,(1 - X + X^2).$$
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer : $E = F \oplus G$.
   (c) Donner le projeté de X^2 sur F selon G.

Exercice 2 On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définis par
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1 + X^2)P'_n \quad (*),$$
autrement dit $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \dfrac{1}{n+1}(1 + X^2)P'_n(X)$.

1. (a) Calculer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme à coefficients réels de degré n et de coefficient dominant égal à $(n + 1)$.
2. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n(-X) = (-1)^n P_n(X).$$
   Quelle propriété ce résultat traduit-il ? Que peut-on en déduire sur les puissances des monômes composant chaque polynôme P_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la somme des racines de P_n est nulle.
3. (a) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $g_n = P_n(i)$, est géométrique.
   (b) Si $n \in \mathbb{N}$: les nombres complexes i et $-i$ sont-ils racines du polynôme P_n ?
4. (a) A partir de la relation $(*)$, donner une expression de P'_{n+2} à l'aide des polynômes P_{n+1}, P'_{n+1} et P''_{n+1} (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad P'_{n+1} = (n + 2)P_n.$$
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, un nombre complexe différent de i et de $-i$, et un entier $n \geqslant 0$. Justifier l'implication :
$$\begin{cases} P_{n+1}(\alpha) &= 0 \\ P'_{n+1}(\alpha) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_n(\alpha) &= 0 \\ P'_n(\alpha) &= 0 \end{cases}$$

(d) En déduire que **toutes** les racines de P_n sont simples (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

5. Montrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.

   (a) Exprimer u_{n+2} à l'aide de u_n, u_{n+1} et x.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression du terme général u_n en fonction de n et du nombre réel x.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)$$
   où, bien entendu, $i^2 = -1$.

7. On rappelle la définition de la fonction cotan $= \dfrac{\cos}{\sin}$.

   (a) Etudier la monotonie de la fonction cotan sur l'intervalle $]0,\pi[$.

   (b) <u>Soit $n \geqslant 1$</u>. Pour tout réel $\theta \in]0,\pi[$, simplifier au maximum $P_n(\text{cotan}(\theta))$.

   (c) Montrer que, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\alpha_k = \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ est une racine de P_n.

   (d) En déduire que le polynôme P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et préciser la factorisation de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

8. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le polynôme dérivé P'_n est aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

« pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$ ».

Autrement dit :
$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit la suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{E}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

   (a) Calculer les termes a_2, a_3, a_4 (pour vérification : $a_5 = 30$).

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

   (c) Etudier la monotonie de la suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$, puis montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

3. Soit la suite $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{E}$ définie par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

   (a) Calculer les termes b_2, b_3, b_4 (pour vérification : $b_5 = 43$).

   (b) Etudier la convergence de la suite $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$.

4. On suppose que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :
   $$u_0 = \alpha a_0 + \beta b_0 \quad \text{et} \quad u_1 = \alpha a_1 + \beta b_1.$$
   (b) Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
   (c) Prouver que $\mathcal{E}$ est un plan vectoriel.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$.
   Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$w_n = (-1)^{n+1}.$$
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit : $f_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   (a) Exprimer $f_{n+1} - f_n$ en fonction de w_n, b_n et b_{n+1}.
   (b) Montrer[1] que les suites $(f_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(f_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (c) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente : on notera L sa limite.
   A l'aide des valeurs calculées au début de cet exercice, donner un encadrement le plus précis possible de L par des nombres rationnels explicites.
7. (a) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $0 < |f_n - L| \leqslant \dfrac{1}{b_n^2}$.
   (b) Montrer que L est un nombre irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde.
8. On note $\mathcal{C}$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites convergentes.
   (a) Montrer que, si v appartient à $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}$, alors v converge vers 0.
   (b) Montrer que $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}$ est une droite vectorielle.
   (c) Les sous-espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
   (d) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant n!$ et $0 \leqslant b_n \leqslant n!$.
   (e) A-t-on $\mathcal{E} + \mathcal{C} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

,

1. On pensera à utiliser *astucieusement* le résultat de la question précédente...