La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

On se propose de déterminer la limite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = a_n \times b_n$ où

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \qquad \text{et} \qquad b_n = \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ et un équivalent la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Quelle est la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$ lorsque n tend $+\infty$?
   On attend une preuve rigoureuse de ce résultat.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que b_n est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Conclure.

Exercice 2

1. Un résultat préliminaire : soit E, un espace vectoriel de dimension N ($N \geqslant 2$).
   On note H_1 et H_2, deux hyperplans distincts de E, en d'autres termes des sous-espaces vérifiant
   $$\dim(H_1) = \dim(H_2) = N - 1 \qquad \text{et} \qquad H_1 \neq H_2.$$
   (a) Prouver : $H_1 + H_2 = E$.
   (b) En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.
2. Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose
   $$f(P) = \frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P.$$
   On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$, la base canonique de E.
   Montrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
4. Montrer que f est un projecteur de E.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.
6. Montrer l'inclusion
   $$\mathrm{Im}(f) \subset G$$
   où $G = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.
7. On considère l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E = \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P'(1) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que φ est surjective.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, le noyau de l'application φ.
8. (a) Justifier que G est un sous-espace de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
   (b) En s'aidant du résultat préliminaire, donner la dimension de G.
9. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(f) = G$.
10. Préciser une base de $\mathrm{Im}(f)$.
11. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $E = \mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 3

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\mathrm{d}t$, quantité qu'on ne cherchera pas à expliciter.

1. (a) Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Préciser son signe.
   (b) A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout réel $x > 0$:
   $$f(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\mathrm{d}u.$$
   (c) On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\mathrm{d}u$.
   Montrer que cela définit une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et calculer sa dérivée F'.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et est solution d'une équation différentielle de la forme :
   $$\text{« } f'(x) + f(x) = \beta(x) \text{ »}$$
   où β est une fonction (du type fraction rationnelle) que l'on explicitera.
   (e) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\mathrm{d}t + \beta(x).$$
   (f) En déduire une expression de $f'(x)$ sous la forme $\displaystyle\int_0^1 \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $\alpha(x,t)$ est une fonction de x et de t.
   (g) Préciser la monotonie de la fonction f.
   La fonction f admet-elle des limites en 0^+ et en $+\infty$? (on ne demande pas, pour l'instant de calculer ces limites).
2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x}.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (a) Rappeler l'énoncé (hypothèses comprises) de l'**inégalité des accroissements finis**.
   (b) A l'aide de cet énoncé, déterminer un réel positif M tel que
   $$\text{pour tout } t \in [0,1],\ |e^t - 1| \leqslant Mt.$$
   (c) Soit g, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\mathrm{d}t$.
   Montrer que g est une fonction bornée sur $]0,+\infty[$.
   (d) Quelle relation simple existe-t-il entre $f(x)$ et $g(x)$?
   En déduire l'équivalent suivant :
   $$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$
4. On se propose désormais de déterminer une valeur approchée de $f(1)$.
   On introduit la fonction h, définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,1]$, $h(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$.
   (a) Etudier la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) On définit deux suites $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ par, pour tout $n \geqslant 1$:
   $$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n. Un schéma clair serait le bienvenu.

(c) Prouver : pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$,
$$\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(d) Déduire, de ce qui précède : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leqslant \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

(e) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer l'**allure** de la courbe représentative de f. Indication : $f(1) \approx 1,12$.

Exercice 4

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et f, un endomorphisme de E de rang $2n$.

1. (a) Que vaut $\dim(\mathrm{Ker}(f))$? Une explication claire est attendue.

   (b) Soit g, la restriction de f au sous-espace $\mathrm{Im}(f)$: on rappelle que cela signifie
   $$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array} \right. .$$
   Montrer : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
   En déduire : $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

2. On suppose désormais, en plus, $f^3 = 0$.

   (a) Déterminer la valeur de $\mathrm{rg}(f^2)$.

   (b) Soit S, un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^2)$ dans E. Montrer que S est de dimension n.
   On considère alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, une base de S.

   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n), f^2(\vec{e}_1), f^2(\vec{e}_2), \dots, f^2(\vec{e}_n)\big)$ est une base de E.

   (d) Ecrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Exemple : soit φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

   Que vaut φ^3 ? Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.