La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Ce problème propose d'étudier une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B, C et D les quatre parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

- la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération
- si la mutation touche A alors elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la génération suivante
- si la mutation touche B alors elle touche équiprobablement A ou D à la génération suivante
- si la mutation touche C alors elle touche équiprobablement B ou C à la génération suivante
- si la mutation touche D alors elle continue de toucher D à la génération suivante.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute lettre $X \in \{A, B, C, D\}$, on note

X_n l'événement «la mutation touche X à la $n^{\text{ième}}$ génération» et x_n sa probabilité.

Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_1 = c_1 = d_1 = 0.$$

1. Déterminer a_2, b_2, c_2 et d_2.
2. Calculer la probabilité que la mutation touche A à la $2^{\text{ième}}$ génération sachant qu'elle touche D à la $3^{\text{ième}}$.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Que peut-on dire de la somme $a_n + b_n + c_n + d_n$? Justifier.
   (b) Montrer : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$.
   Obtenir des expressions similaires pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.
   (c) En déduire :
   $$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ où } L \text{ est une matrice à exprimer en fonction de } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ * \\ * \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$ (où les $*$ représentent des entiers) et dans laquelle la matrice de f est
   $$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (b) En écrivant $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donner une expression de T^n, fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.
   (c) Indiquer une méthode permettant d'obtenir M^n, puis L^n pour tout $n \geqslant 2$.
5. En déduire une expression de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de l'entier $n \geqslant 3$.
   Une indication : $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = 3\vec{e}_1$.
6. Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité que la mutation touche A à la $n^{\text{ième}}$ génération sachant qu'elle touche D à la $(n+1)^{\text{ième}}$ génération.

Exercice 2 Dans tout ce problème, h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ par :

$$\boxed{h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}}$$

Les cinq parties de ce problème sont plus ou moins indépendantes.

Partie 1 : cours (pas de preuve exigée)

1. Recopier et compléter :
$$\forall x \in \ldots\ldots, \quad \arctan'(x) = \ldots\ldots.$$
2. Soit n, un entier naturel. Rappeler l'expression des développements limités en $x = 0$ de
   (a) $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n.
   (b) $\arctan(x)$ à l'ordre $2n+1$.
3. Représenter le graphe de la fonction arctan (on fera apparaître clairement les valeurs des éventuelles limites).

Partie 2 : étude de h et quelques applications

1. Etudier la continuité de h sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Justifier que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   Vérifier que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$ où f désigne une fonction que l'on explicitera.
   (b) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
   (c) Dresser alors le tableau de variation de h, limites aux bords comprises (et justifiées).
   (d) Montrer que h possède un développement limité d'ordre 2 en 0 (à droite) que l'on exhibera. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (e) Montrer que h est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de son nombre dérivée (à droite) en 0.
   (f) A l'aide des éléments précédents, donner l'allure de la courbe représentative de h sur $[0, +\infty[$.
3. (a) Justifier que h admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer l'allure de la courbe représentative de cette réciproque h^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation
   $$(E_n) \text{ « } n \arctan(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \text{ »}$$
   possède, sur $]0, +\infty[$, une et une seule solution x que l'on notera u_n.
   Déterminer la limite de cette suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ ainsi construite, et en préciser un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$.
4. Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de g, noté I.
   (b) Déterminer le signe de g sur I, et ses variations sur I.
   (c) Justifier que, pour tout $x \geqslant 1$: $g(x) \geqslant \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (g(x))$.
   (d) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'expression explicite de $g(x)$ en fonction de x.

Partie 3 : étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$\text{pour tout } x \in [0,+\infty[, \quad 2xy'(x)+y(x)=\frac{1}{1+x}.$$

L'objet de cette partie est l'étude des solutions y dérivables sur $[0,+\infty[$.

1. Résoudre, sur $]0,+\infty[$, l'équation homogène (EH) associée à (E).
2. (a) Etudier l'existence de primitives de la fonction $k : x \mapsto k(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.
   A l'aide du changement de variable $t=\sqrt{x}$, déterminer l'expression d'une primitive de k.
   (b) Déduire de ces calculs une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que (E) possède une et une seule solution y qui soit dérivable sur $[0,+\infty[=\mathbb{R}^+$.

Partie 4 : étude des dérivées successives de h

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et $h^{(n)}$ la fonction dérivée d'ordre n de h.

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $2xh'(x)+h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
2. Une expression de $h^{(n)}$
   (a) Déterminer le développement limité de h à l'ordre n en $x=0$.
   (b) Prouver qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels et un réel λ_n (dépendants de n) tels que :
   $$(*) \quad \text{pour tout } x>0, \boxed{h^{(n)}(x)=\frac{1}{\left(x(1+x)\right)^n}P_n(x)+\frac{\lambda_n}{x^n}h(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda_{n+1}=-\frac{2n+1}{2}\lambda_n.$$
   Préciser les valeurs de P_0 et λ_0.
   (c) Montrer : $\lambda_n=\dfrac{(-1)^n n!}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.
   Le cours de mathématiques de seconde année permettra de justifier facilement que **la fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$: on admet ce résultat** pour la suite du problème.
   (d) Rappeler l'énoncé de la formule de Taylor-Young (hypothèses comprises).
   En déduire l'expression de $h^{(n)}(0)$ en fonction de n.
   (e) A l'aide de $(*)$, calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^n h^{(n)}(x)\right)$, et en déduire $P_n(0)$.
3. Une relation pour P_n
   (a) Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$:
   $$2xh^{(n+1)}(x)+(2n+1)h^{(n)}(x)=Q^{(n)}(x) \quad \text{où} \quad Q : x \mapsto Q(x)=\frac{1}{1+x}.$$
   (b) Par ailleurs, déterminer l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction Q.
   (c) A l'aide de $(*)$, en déduire l'égalité :
   $$2P_{n+1}(x)+(2n+1)(1+x)P_n(x)=(-1)^n n! x^n.$$
   (d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

Partie 5 : calcul de la somme d'une série

Soit la suite $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1. (a) On définit deux nouvelles suites $p = (p_n)_{n\geqslant 0}$ et $i = (i_n)_{n\geqslant 0}$ par
$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad p_n = S_{2n} \quad \text{et} \quad i_n = S_{2n+1}.$$
Montrer que $p = (p_n)_{n\geqslant 0}$ et $i = (i_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites adjacentes.
   (b) Montrer que la suite S converge. On note L sa limite.
   (c) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-2} près.
2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$
Exprimer $D_n(x)$ à l'aide de $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. En calculant $\displaystyle\int_0^1 D_n(x)\mathrm{d}x$ de deux façons, montrer :
$$\text{pour } n \geqslant 0, \left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$
Conclusion ?

Exercice 3 Un n-**lancer** est un n-uplet $(d_1, \cdots, d_n)$ où d_i correspond au résultat du $i^{ième}$ lancer d'un dé équilibré à six faces.
Pour $(n, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, un n-lancer est dit q-**chanceux** s'il n'y a jamais q faces identiques à la suite.
On note $u_n^{(q)}$ le nombre de n-lancer qui sont q-chanceux et $p_n^{(q)}$ la probabilité qu'un n-lancer soit q-chanceux. Par exemple $(1, 2, 5, 5, 5, 1, 3, 3)$ est un 8-lancer 4-chanceux, mais pas 3-chanceux.

1. Quel est le nombre de n-lancers ? Quelle relation lie $u_n^{(q)}$ et $p_n^{(q)}$?
2. Que vaut $u_n^{(1)}$? Pour $1 \leqslant n < q$ préciser les valeurs de $u_n^{(q)}$ et $p_n^{(q)}$.
3. Que valent $u_n^{(n)}$ et $p_n^{(n)}$?
4. Pour $n \geqslant 2$, donner les valeurs de $u_n^{(2)}$ et $p_n^{(2)}$.
5. On suppose $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$ fixé. On notera désormais, pour simplifier, u_n et p_n à la place de $u_n^{(q)}$ et $p_n^{(q)}$. On admet que
$$5u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6u_n.$$
   (a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \leqslant p_n \leqslant 1$.
6. Dans cette question on suppose $q = 3$.
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 3$, on a $u_n = 5\left(u_{n-1} + u_{n-2}\right)$.
   (b) En déduire u_n puis p_n en fonction de n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n)$?
7. Démontrer, dans le cas général où $q \geqslant 2$, l'encadrement admis ci-dessus à la question **5**.