La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Pour les questions de cours **(1.)** et **(2.)**, aucune preuve n'est demandée.

1. Si Q est un nombre complexe et n un entier naturel, simplifier, les sommes suivantes :

   (a) $1+Q+Q^2+\cdots+Q^n=\sum_{k=0}^{n} Q^k=\ldots ?$

   (b) $1-Q+Q^2-\cdots+(-1)^n Q^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Q^k=\ldots ?$

2. Rappeler précisément la formule du binôme de Newton.

3. Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$ de deux manières et retrouver l'expression du cours pour le calcul de $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

4. (a) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[\![1\,;\,n]\!]$,
$$p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}.$$

   (b) En déduire une expression simple de $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$.

   (c) Calculer $S=\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant n}\binom{n}{p}$.

Exercice 2 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par
$$f_m\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+mz\\ x-y-mz\\ 2x+my+z\end{pmatrix}$$
On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'espace image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m=1$

   (a) Calculer $f_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $f_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?

   (b) Résoudre le système $f_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?

(c) A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_1 ?

2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.

   (a) Pour $m \notin \{-1, 1\}$, montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?

   (b) Pour $m = 2$, déterminer $f_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) Que dire de f_{-1} ?

PROBLEME On définit la suite $F = (F_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$F_0 = 0 \quad \text{et} \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Donner la valeur de F_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (présenter ces résultats dans un tableau).
2. Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5$, on a $F_n \geqslant \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.
   On donne $4^5 = 1024$ et $5 \times 3^5 = 1215$.
3. Quelle est la limite de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Première application

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\dfrac{1}{F_{n+1}F_n} - \dfrac{1}{F_{n+2}F_{n+1}}$.
5. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k+2}F_k}$ dans laquelle le symbole $\sum$ n'apparaît pas.

L'identité de Cassini

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n = F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}.$$

6. Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} + g_n$ et en déduire que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique.
7. Retrouver ainsi l'identité de Cassini

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

8. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n^2 - (-1)^n = F_{n+1} F_n.$$

9. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k F_{k+1}$.

Une somme plus compliquée

10. Exprimer F_{n+2} et F_{n-2} à l'aide de F_{n-1}, F_n et F_{n+1}.

11. En déduire
$$F_{n+2} F_{n-2} = (-1)^{n-1} + F_n^2$$
puis
$$F_{n+2} F_{n-2} - F_{n-1} F_{n+1} = 2\,(-1)^{n-1}.$$

12. Montrer
$$F_n^4 - 1 = F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2}.$$
On pourra commencer par élever au carré chaque membre de l'identité de Cassini.

13. Si $n \geqslant 3$, on considère la somme
$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2\,(-1)^{k-1} F_{k+2}}{F_k^4 - 1}.$$
   (a) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 3$,
$$\frac{2\,(-1)^{n-1} F_{n+2}}{F_n^4 - 1} = \frac{a}{F_{n-2}} + \frac{b}{F_{n-1}} + \frac{c}{F_{n+1}} \qquad \text{avec} \quad a + b + c = 0.$$
   (b) En déduire
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-1} F_n F_{n+1}}.$$

Une équation diophantienne

14. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) vérifiant l'équation $|x^2+xy-y^2| = 1$. Ainsi : $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x^2 + xy - y^2| = 1\}$,
   (a) Chercher des exemples d'éléments de $\mathcal{D}$.
   (b) Quelle valeur doit-on donner à F_{-1} pour que la relation qui définit la suite de Fibonacci soit valable à partir de $n = -1$?
   (c) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble formé des couples de deux valeurs consécutives de la suite $(F_n)_{n \geqslant -1}$. Autrement dit :
$$\mathcal{C} = \{(F_{n-1}, F_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(F_{-1}, F_0), (F_0, F_1), (F_1, F_2), \dots\}.$$
   Quelle relation existe-t-il entre les ensembles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$?

(d) Montrer que, **si** $(x, y) \in \mathcal{D}$ et $y \geqslant 2$ **alors** $x \leqslant y-1$ et $(y-x, x) \in \mathcal{D}$.

(e) Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $y \leqslant 1$.

(f) Pour tout entier $p \geqslant 0$, on définit la proposition H_p par :

H_p : «tout couple (x, y), tel que $(x, y) \in \mathcal{D}$ et $y \leqslant p$, est un élément de $\mathcal{C}$».

- Vérifier que les propositions H_0 et H_1 sont vraies.
- Pour un entier $p \geqslant 1$, on suppose vraie la proposition H_p.
  Montrer que, sous cette hypothèse, la proposition H_{p+1} est vraie.
- Conclusion ?

(g) Montrer l'égalité $\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Et pour finir une suite

On pose $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et on définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On note ℓ l'unique réel de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$.

15. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{F_n}{F_{n+2}}.$$
16. Justifier que l'on peut définir une suite $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ avec
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - \ell}{u_n - \frac{1}{\ell}}.$$
17. Montrer que la suite v est géométrique de raison $-\ell$.
18. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, fonction de n (et de ℓ).
19. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
20. On pose, pour $n \geqslant 1$, $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$: exprimer u_n en fonction de r_n et en déduire la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.