La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou $\boxed{\textit{soulignés}}$.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
$$\tan(a+b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$
2. Si Q est un nombre complexe et N un entier naturel, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $1 + Q + Q^2 + \cdots + Q^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} Q^k = \ldots ?$
   (b) $1 - Q + Q^2 - \cdots + (-1)^N Q^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k Q^k = \ldots ?$
   (c) $1 - Q^2 + Q^4 - \cdots + (-1)^N Q^{2N} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k Q^{2k} = \ldots ?$
3. Rappeler la <u>définition</u> **et** l'<u>expression</u> des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (où $n \geqslant 1$).
4. Si θ est un réel, factoriser :
$$1 + e^{i\theta} = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \ldots$$
puis factoriser
$$1 + \cos(\theta) = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(\theta) = \ldots$$
5. Si r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme du second degré $P(X) = aX^2 + bX + c$, que valent leur somme $r_1 + r_2$ et leur produit $r_1 r_2$ en fonction des coefficients du polynôme P ?

Exercice 2

1. Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.
2. On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - z^2 + (-3+i)z + 6 + 2i$.
   Montrer que ce polynôme P possède une unique racine réelle, et déterminer celle-ci.
3. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 3 On pose $a = e^{\frac{i\pi}{5}}$.

1. Justifier l'égalité : $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 = 0$.
2. Justifier l'égalité : $1 - (a + \bar{a}) + (a^2 + \bar{a}^2) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$.
3. En déduire la valeur de $1 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. Montrer que $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 Soit f définie sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ par $f(z) = \dfrac{iz - 1}{z - i}$. Les questions suivantes ne sont pas nécessairement liées.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
   Pour $W \in \widehat{\mathbb{C}}$, déterminer $f^{-1}(W)$.

2. Déterminer les $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   Quel ensemble a t-on ainsi déterminé :
   $$① \ f(\mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad ② \ f^{-1}(\mathbb{R})\,?$$
   Préciser alors qui est exactement cet ensemble.
3. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier $f\left(i + e^{i\theta}\right)$.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que le point d'affixe z soit sur le cercle de centre A, d'affixe i, et de rayon 1. Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{C})$, image directe par f du «cercle $\mathcal{C}$» : quelle figure géométrique cet ensemble image représente-t-il ?
4. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{U})$ (l'image réciproque de l'ensemble des complexes de module 1).
5. Déterminer toutes les solutions z de l'équation : $(f(z))^6 = 1$.
   Montrer qu'elles sont toutes réelles.

Exercice 5 Soit p, un entier naturel non nul et l'équation en z suivante :

$$(E_p) \quad : \quad pz^p = z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1, \quad \text{c'est à dire} \quad pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k.$$

1. Résoudre les équations :
   (a) (E_2) : $2z^2 = z + 1$.
   (b) (E_3) : $3z^3 = z^2 + z + 1$.
2. Une solution z de (E_p) peut-elle être de module strictement supérieur à 1 ?
3. Soit $e^{i\theta}$, une solution de (E_p) de module 1, autre que 1.
   (a) Dans quel intervalle peut-on donc choisir θ ?
   (b) Justifier l'égalité :
   $$e^{\dfrac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})},$$
   puis en déduire une contradiction.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 Soit a, b c et d quatre réels strictement positifs tels que $a+b+c+d = 1$. Le but de cet exercice est de prouver :

$$(*) \quad \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geqslant 4.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels x, y et z strictement positifs (à exprimer en fonction de a, b et c) tels que :
   $$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} = \frac{x}{y(1-y)} + \frac{1-x}{z(1-z)}.$$
2. Démontrer : pour tout $t \in [0,1]$, on a $t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$.
3. En déduire l'inégalité demandée.
4. Discuter le cas d'égalité dans $(*)$.
5. Montrer que l'inégalité $(*)$ reste vraie même sans la condition $a+b+c+d = 1$.