La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Compléter (pas de preuve exigée) **sur la feuille jointe à ce sujet (à glisser dans votre copie)** :
   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$
   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$
   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$
   (d) $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (e) $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (f) $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (g) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$
   (h) Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
   $$\tan(a+b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$
   (i) $\forall x \in \ldots$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) = \ldots$
   (j) Donner les valeurs exactes de :
   $$\text{Arctan}(-1) = \ldots\ldots, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots\ldots, \quad \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$$
2. Donner les développements limités d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque $x \to 0$ (notés $\text{DL}_n(0)$) des quantités suivantes (où α désigne une constante réelle) :
   (a) $\text{DL}_{\mathbf{3}}(0)$ de
   $$\tan(x) \qquad \textbf{et} \qquad (1+x)^\alpha \qquad \textbf{et} \qquad \sqrt{1+x}. \qquad .$$
   (b) $\text{DL}_{\mathbf{5}}(0)$ de
   $$\text{sh}(x) \ \textbf{et} \ \text{ch}(x) \ \textbf{et} \ \sin(x) \ \textbf{et} \ \cos(x) \ \textbf{et} \ \ln(1+x) \ \textbf{et} \ \frac{1}{1+x} \ \textbf{et} \ \arctan(x) \ \textbf{et} \ e^x.$$
   Les réponses doivent être écrites sur la feuille jointe à ce sujet (ne pas oublier de la glisser dans votre copie).
3. On pose $A = \text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$ et $B = 2\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.
   Calculer $\cos(A)$ et $\cos(B)$, puis comparer A et B.
4. *Dans cette question de vérification des techniques de calculs, il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales.*
   (a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx$.

(b) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

(c) Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_{0}^{4} e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

5. Pour tout paramètre $k \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_k par
$$f_k(x) = \frac{1}{1-x} + ke^{-2x}.$$
On désigne par $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

(a) Déterminer le développement limité d'ordre 3, en $x = 0$ de $f_k(x)$.

(b) Donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ en $x = 0$.
Montrer que toutes les tangentes T_k sont concourantes (avec $k \in \mathbb{R}$) en un point à déterminer.

(c) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent un point d'inflexion en $x = 0$? Si oui, les déterminer et tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.

(d) On définit la fonction φ_k par $\varphi_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}$.
Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger φ_k par continuité en 0 : on appelle ψ cette fonction φ_k. Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.

6. On définit la fonction th par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

(a) Justifier que la fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée th'. On donnera deux expressions de th' : une uniquement en fonction de th, l'autre en fonction de ch.

(b) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{th}(x) \in \,]-1,+1[$.

(c) On pose $f(x) = \arccos(\mathrm{th}(x)) + \arctan(\mathrm{sh}(x))$.
Dériver f et en déduire une expression simplifiée pour f.

Exercice 2

On pose
$$u_n = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{où } \ln^n(x) = (\ln(x))^n \text{ et } n \text{ entier naturel.}$$
On rappelle : $0! = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et calculer u_0.

2. A l'aide d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   En déduire u_1 et u_2.
3. A l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que $u_n = \displaystyle\int_a^b t^n g(t)\,\mathrm{d}t$ où les constantes a, b et la fonction g sont à préciser.
4. En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Montrer[1] qu'il existe une suite d'**entiers naturels** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n! - \dfrac{b_n}{e}$. Préciser b_0, b_1, b_2 ainsi qu'une relation de récurrence entre b_{n+1} et b_n.
6. Déterminer les valeurs de $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n!}{b_n}\right)$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant b_n$ et en déduire un encadrement de $\left(\dfrac{n!}{b_n} - \dfrac{1}{e}\right)$ faisant intervenir une factorielle.
8. On désire calculer $\dfrac{1}{e}$ à 10^{-3} près.
   (a) A l'aide de ce qui précède, donner un rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ tel que $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{e}\right| \leqslant 10^{-3}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   En déduire, si $n \geqslant 1$: $b_n \geqslant 2 \times n!$.
   (c) Peut-on améliorer la réponse à la question (**8a**) ?
9. On rappelle la définition de la **partie entière** $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x : il s'agit de l'unique entier relatif N vérifiant $N \leqslant x < N+1$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation :
   $$\boxed{(N = \lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow (N \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad N \leqslant x < N+1)}.$$
   Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a : $b_n = \lfloor e n! \rfloor$.
   Cette égalité est-elle encore vérifiée pour $n = 1$? $n = 0$?

Exercice 3

On fixe un réel $a \in]-1, +1[$.

1. Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0.$$

1. On pourra poser la proposition $P(n)$: «il existe un entier naturel b_n tel que $u_n = n! - \frac{b_n}{e}$».

2. On définit la fonction

$$f_a : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_a(t) = \ln\left(a^2 - 2a\cos(t) + 1\right) \end{array} \right.$$

et l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} f_a(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos(t) + 1\right)\mathrm{d}\,t.$$

(a) Justifier l'existence de la fonction f_a et de l'intégrale $I(a)$.

(b) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = t + \pi$:

$$\int_\pi^{2\pi} f_a(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^\pi f_{-a}(t)\mathrm{d}\,t.$$

(c) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = f_{a^2}(2t).$$

(d) En déduire :

$$I(a) = \int_0^\pi f_{a^2}(2t)\mathrm{d}\,t.$$

3. (a) Comparer $I(a)$ et $I(a^2)$.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer $I(a)$ en fonction de $I(a^{2^p})$.

4. On suppose $a \in [0, 1[$ dans cette question

(a) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2\ln(1-a) \leqslant f_a(t) \leqslant 2\ln(1+a).$$

(b) En déduire un encadrement de $I(a)$.

(c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{4\pi\ln(1-a^{2^p})}{2^p} \leqslant I(a) \leqslant \frac{4\pi\ln(1+a^{2^p})}{2^p}.$$

(d) En déduire $I(a) = 0$.

5. Que vaut $I(a)$ si $a \in]-1, 0[$?