La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Donner les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes :

1. (E_1) « $3y'' + 5y' - 2y = 10$ ».
2. (E_2) « $y'' + 8y' + 16y = 2e^{-2x}$ ».
3. (E_3) « $y'' + 6y' + 13y = 6\sin(x)$ ».

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x)\,y' - xy = -\,(2x-3)\,e^{-x}.$$

On désigne par I **un** intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$.

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène sur I.
2. A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière sur I. Donner ensuite la forme générale des solutions de (E) sur I.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{2e^{x+2} + (x-1)\,e^{-x}}{1+x}$$

   (a) Justifier que f est solution de (E) sur I_1 et sur I_2.

   (b) Montrer que pour h réel non nul, $f(-1+h) = 4e\,\dfrac{\mathrm{sh}\,(h)}{h} + e^{1-h}$.

   (c) Donner le $\mathrm{DL}_2\,(x \to -1)$ de $f(x)$.
   En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en -1.
   Justifier que le prolongement obtenu est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (en entier) et donner l'allure locale en $x = -1$.

   (d) La fonction f est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier ?

4. On suppose que g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.

   (a) Donner l'expression de g sur I_1 et sur I_2 en fonction de deux constantes K_1 et K_2.

   (b) Justifier que $\lim\limits_{x\to -1^-} ((1+x)\,g(x)) = \lim\limits_{x \to -1^+} ((1+x)\,g(x)) = 0$, et en déduire les valeurs de K_1 et K_2. Qu'en déduire pour g ?

5. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} -2a+1 & -2a \\ a & a+1 \end{pmatrix}.$$

1. Etude des matrices $M(a)$
   (a) Déterminer le déterminant de la matrice $M(a)$ en fonction de a.
   (b) Préciser pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est inversible, et calculer son inverse $M(a)^{-1}$ dans ce cas.
   (c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) \times M(b) = M(c)$.
   On exprimera c à l'aide de a et b.
   (d) Retrouver ainsi l'inverse de $M(a)$ lorsqu'il existe.
2. Une suite récurrente
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (1-a)\,u_n + a$.
   (a) On définit la suite g par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = u_n - 1$.
   Prouver que g est une suite géométrique puis exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = M(u_n)$.
3. Autre calcul de $M(a)^n$
   On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible, calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}M(a)P$ est diagonale.
   (c) Retrouver l'expression de $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la comparer avec celle trouvée à la question **(2b)**.
4. Encore un autre calcul de $M(a)^n$
   On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) On note J la matrice définie par : $\forall a \in \mathbb{R}$, $M(a) = I + aJ$.
   Calculer J^2 et en déduire J^k pour tout entier $k \geqslant 0$.
   (b) En déduire une nouvelle façon de calculer $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et comparer ce résultat à celui obtenu aux questions **(2b)** et **(3c)**.

Exercice 4

1. On considère l'équation différentielle :
$$y'' - y = 2\,\mathrm{ch}(x) \qquad (G)\ .$$
Montrer, en la déterminant, que l'équation différentielle (G) possède une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)\,\mathrm{sh}(x)$ où $Q(x) = ax + b$ désigne un polynôme de degré un.
Préciser alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle (G).

On se propose désormais de résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation :
$$xy'' + 2y' - xy = 2\,\mathrm{ch}\,(x) \qquad (E)\ .$$

2. On pose, pour $x \in\,]0, +\infty[$:
$$y\,(x) = \frac{z\,(x)}{x} \quad \text{i.e} \quad z(x) = xy(x).$$
Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (F) que l'on précisera.

3. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation (E).

4. Donner l'unique solution g de (E) telle que
$$\begin{cases} g\,(1) &= 0 \\ g'\,(1) &= \mathrm{sh}\,(1) \end{cases}.$$

5. Montrer que $g\,(x)$ possède un développement limité au voisinage de $x = 0$ (à droite) d'ordre un. Peut-on prolonger g par continuité en 0 ? Si oui, ainsi prolongée, g est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 5

Partie 1

On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.
Montrer que f est une bijection de $]0, 1[$ vers $]0, +\infty[$ (on pourra étudier la fonction f).
On note g sa bijection réciproque. Donner, pour tout $x > 0$, une expression simple de $g(x)$.

Partie 2

On considère l'équation différentielle
$$(H)\ :\ 2x(1-x)y' + y = 0.$$

1. Résoudre[1] (H) sur l'intervalle $]0, 1[$.

2. Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle :
$$(E)\ :\ 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

1. On cherche donc ici uniquement les fonctions solutions $y\ :]0, 1[\to \mathbb{R}$.

3. Déterminer les solutions y de (E) définies sur $]0,1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Quelles sont les solutions de (E) définies sur $]0,1[$ et qui sont à valeurs dans $]0,+\infty[$?

Partie 3

On considère l'équation différentielle **non linéaire**

$$(K)\ :\ xy' + 2y(1-y) = 0.$$

Par définition, les solutions de (K) sur un intervalle I sont les fonctions u dérivables sur I telles que

$$\forall x \in I, \quad x\,u'(x) + 2u(x)\,(1-u(x)) = 0.$$

1. Quelles sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (K) ?
2. Dans cette question, on suppose que u est solution de (K) sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]0,1[$.
   (a) Montrer que u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
   On peut en déduire (voir le cours *fonction-limite-continuité*) que, dans ce cas, la fonction u possède des limites (*finies ou infinies*) aux bords i.e $\lim\limits_{x\to 0^+}(u(x))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x))$ existent.
   De plus, u étant une fonction bornée, à valeurs dans $]0,1[$, on peut alors affirmer que ces limites sont finies avec, en posant $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty}(u(x))$ et $\beta = \lim\limits_{x\to 0^+}(u(x))$:
   $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, et u réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]\alpha,\beta[$.
   (b) On note v la bijection réciproque de u. Montrer que v est solution de (H) sur $]\alpha,\beta[$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $c > 0$ tel que :
   $$\forall x > 0,\ \ u(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}.$$
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (K) sur $]0,+\infty[$ et qui sont à valeurs dans $]0,1[$.
   (a) Décrire $\mathcal{S}$.
   (b) Soit x_0 un réel strictement positif (fixé). Soit $y_0 \in]0,1[$ (fixé lui aussi).
   Montrer qu'il existe une, et une seule, solution u_0 de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x_0) = y_0$.
   (c) Trouver l'ensemble des points $m(x,y)$ du plan qui vérifient $u_0''(x) = 0$, où u_0 est l'unique élément de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x) = y$.
   Autrement dit, déterminer l'ensemble des points du plan en lesquels la dérivée seconde des éléments de $\mathcal{S}$ s'annule.