La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, on définit les deux déterminants

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer A_2 et B_2 puis A_3 et B_3.
2. (a) Pour $n \geqslant 3$, montrer :
$$A_n = 2A_{n-1} + B_{n-1}.$$
   (b) De même, montrer :
$$B_n = A_{n-1} + B_{n-1}.$$
   (c) Quelles valeurs doit-on donner à A_1, B_1, A_0 et B_0 pour que les deux relations précédentes soient encore vraies pour $n \geqslant 1$?

   (d) Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$A_n =$							233
$B_n =$							144

3. Montrer que les suites $(A_n)_{n\geqslant 0}$ et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient la même relation linéaire de récurrence à deux termes.
4. Exprimer A_n et B_n en fonction de n.
   On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) : calculer et simplifier φ^2 et $\dfrac{1}{\varphi^2}$ et donner une expression de A_n et B_n en fonction de n et φ.
5. Préciser des équivalents simples de A_n et B_n lorsque $n \to +\infty$, puis calculer les valeurs des limites $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(B_n)$.
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n et B_n sont des entiers naturels.

   (b) Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre rationnel $Q_n = \dfrac{A_n}{B_n}$ est bien défini.

   (c) Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(Q_n)$.
7. On définit la fonction f sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1} = 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Comparer $f(\varphi)$ et φ.

   (b) Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $Q_{n+1} = f(Q_n)$ puis $Q_n \in [1, 2]$.

   (c) Prouver que la fonction f est $\dfrac{1}{4}-$lipschitzienne sur le segment $[1, 2]$.

(d) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$:
$$|Q_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{4}|Q_n - \varphi|.$$

(e) En déduire pour tout $n \geqslant 1$:
$$|Q_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

(f) Quel résultat retrouve-t-on ?

8. Déterminer, à l'aide des résultats précédents, une approximation rationnelle de φ à 10^{-3} près.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :
$$(E_n) \qquad \text{« } x - \ln(x) = n \text{ ».}$$
On définit la fonction f_n par : $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

I - Etude de la fonction f_n

1. Etudier les variations de f_n sur son ensemble de définition.
2. Déterminer les solutions, si elles existent, de (E_0) et de (E_1).

II - Une première suite

1. A l'aide des variations de f_n sur $]0, 1]$, justifier que l'équation (E_n) admet, pour chaque entier $n \geqslant 2$, une unique solution x_n dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$, et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Justifier que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On notera ℓ sa limite.
4. Quelle est la valeur de ℓ ?
5. Montrer l'équivalent : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.
6. Montrer que l'on a le développement asymptotique à deux termes :
$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + \underset{+\infty}{o}\left(e^{-2n}\right).$$
7. <u>Question complémentaire</u> : pour tout $n \geqslant 2$, on définit la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k$.

   (a) Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$.

   (b) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que :
   $$\text{si } n \geqslant n_0, \text{ alors } x_n \leqslant \frac{3}{2}e^{-n}.$$

   (c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

III - Une seconde suite

1. Montrer que l'équation (E_n) possède, pour tout entier $n \geqslant 2$, une seule racine y_n dans l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
2. Calculer $f_n(n)$ et $f_n(2n)$ et en déduire $n \leqslant y_n \leqslant 2n$ (pour tout $n \geqslant 2$).
3. La suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ converge-t-elle ?
4. Montrer : $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
5. Montrer que l'on a le développement asymptotique à deux termes :
$$y_n = n + \ln(n) + \underset{+\infty}{o}(\ln(n)).$$

Exercice 3

On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **continues** vérifiant :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)) \qquad (*).$$

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1 \quad : \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2u_1 \end{cases}$.
   (a) Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Exprimer, simplement, en fonction de u_1 et de n :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$
   (b) Toujours avec $n \geqslant 2$, développer et simplifier autrement, à l'aide de télescopages :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$
   (c) Pour $n \geqslant 2$, calculer la somme $C_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k-1)$.
   (d) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression de u_n en fonction de n et u_1.
2. Soit f, un élément de $\mathcal{E}$, et x un réel.
   (a) Que vaut $f(0)$? Etudier la parité de f.
   (b) Montrer, à l'aide de la question **(1)** :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n^2 f(x).$$
   (c) Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = n^2 f(x).$$
   (d) Montrer :
   $$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = r^2 f(x).$$
   (e) Montrer :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha^2 f(x).$$

(f) En déduire l'existence d'un réel λ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda t^2.$$

3. Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 4

On note les ensembles

$$E = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad E^+ = E \cap \mathbb{R}^{+*} = E \cap]0, +\infty[.$$

1. On définit les suites $(p_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$p_0 = p_1 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 0, \quad p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n \quad \text{et} \quad u_n = 1 + \frac{p_n}{p_{n+1}}.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_n en fonction de $r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ et n.

   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = p_n + p_{n+1} \quad \text{et} \quad b_n = p_{n+1}.$$

   Montrer :

$$b_n\sqrt{2} - a_n = \frac{r_2^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

   (d) En déduire l'existence d'une suite d'éléments de E^+ qui converge vers 0.

   (e) Justifier que l'ensemble E^+ possède une borne inférieure puis montrer $\inf(E^+) = 0$.

2. (a) Montrer que si $z \in E^+$ alors $nz \in E^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, un réel positif.
   Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in E^+$ tel que $|x - z| \leqslant \varepsilon$.
   Remarque : on dit que l'ensemble E^+ est *dense* dans $\mathbb{R}^+$.

   (c) En déduire que tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ est limite d'une suite à valeurs dans E^+.

3. En déduire que toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à la fois $1-$périodique et $\sqrt{2}-$périodique est constante.