La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice On note $E=\mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On définit les ensembles

$$F=\{P\in E \mid P(1)=P'(1)\} \quad \text{et} \quad G=\operatorname{Vect}(X^2+2X).$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer : $E=F\oplus G$.
3. On note φ la projection vectorielle sur F dans la direction de G.
   Déterminer les images par φ des polynômes
   $$P_1=X^2+1 \quad \text{et} \quad P_2=-4X-2X^2 \quad \text{et} \quad P_3=X^3+X+1.$$

PROBLEME

I - Une famille de polynômes

On pose, pour tout $x\in I=]-\infty,1[$: $g(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}=e^{-\frac{x}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : « $2\,(1-x)\,g'\,(x)=xg\,(x)$».
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
   $$\forall x\in I, \quad g^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)e^{-\frac{x}{2}}}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}.$$
   Au passage, on aura établi une relation du type
   $$P_{n+1}=(a-X)P'_n+\left(\frac{X}{2}+b\right)P_n.$$
   où a et b sont des constantes (à déterminer) dépendant éventuellement de n.
3. Préciser les polynômes P_0, P_1 et P_2.
4. Prouver que, pour tout $n\geqslant 0$, le polynôme P_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{2^n}$.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=P_n(1)$ et $b_n=\dfrac{2^{2n}a_n}{(2n)!}$
   (a) Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n.
   (b) En déduire b_{n+1} en fonction de b_n, puis b_n et enfin a_n en fonction de n.

II - Une expression de $P_n\,(X)$

1. En appliquant la formule de Leibniz à l'ordre n à une certaine égalité, justifier que, pour tout $x\in I$ et $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$2\,(1-x)\,g^{(n+1)}\,(x)-(x+2n)\,g^{(n)}\,(x)-ng^{(n-1)}\,(x)=0.$$
2. En déduire une relation entre les polynômes P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.

3. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$: $P_n' = \dfrac{n}{2}P_{n-1}$.
4. Pour $k \in [\![0 ; n]\!]$, justifier
$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{2^k (n-k)!} P_{n-k}$$
et en déduire :
$$P_n^{(k)}(1) = \binom{2n-2k}{n-k} \frac{n!}{2^{2n-k}}.$$
5. Montrer, pour tout $n \geqslant 0$:
$$P_n(X) = \frac{n!}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \binom{2n-2k}{n-k} (X-1)^k.$$

III - Etude des racines

1. Soit un nombre complexe $\alpha \neq 1$ et un entier $n \geqslant 1$. Justifier l'implication :
$$\left\{\begin{array}{lcl} P_n(\alpha) & = & 0 \\ P'_n(\alpha) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} P_{n-1}(\alpha) & = & 0 \\ P'_{n-1}(\alpha) & = & 0 \end{array}\right. .$$
2. En déduire que toutes les racines (dans $\mathbb{C}$) de P_n sont simples (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

IV - Matrices binaires

• Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$: une matrice à n lignes et n colonnes A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **binaire** si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou à 1.
Dans toute la suite du sujet, i et j désignent des éléments de $[\![1 ; n]\!]$. L'élément d'une matrice situé à la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne est dit en position (i, j).
On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et chaque colonne. Par exemple :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{U}_4 \text{ (première colonne), mais } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_4.$$
On note u_n le cardinal de $\mathcal{U}_n$. On pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.
On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
• Soit f est une application de $\mathcal{U}_n$ dans $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des parties de $\mathcal{U}_n$.
On dit que f induit une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ si pour $A \in \mathcal{A}$ on a $f(A) \in \mathcal{B}$ et si l'application
$$\left| \begin{array}{lcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \text{ est une bijection.}$$
• Pour i, j, p, q dans $[\![1 ; n]\!]$, on désigne par $\Phi_{i \leftrightarrow p}$ l'application qui à $A \in \mathcal{U}_n$ associe la matrice obtenue par échange des lignes L_i et L_p et par $\Psi_{j \leftrightarrow q}$ celle qui à $A \in \mathcal{U}_n$ associe la matrice obtenue

par échange des colonnes C_j et C_q. Il est clair que cela définit bien des applications de $\mathcal{U}_n$ dans $\mathcal{U}_n$ qui vérifient, pour $A \in \mathcal{U}_n$, $\Phi_{i\leftrightarrow p}(\Phi_{i\leftrightarrow p}(A)) = A$ et $\Psi_{j\leftrightarrow q}(\Psi_{j\leftrightarrow q}(A)) = A$.

1. Les résultats demandés dans cette question ne sont pas utiles pour la suite du problème.
   (a) Déterminer le nombre de matrices binaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le nombre de matrices binaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant un seul 1 par ligne et par colonne.
   (c) Déterminer le nombre de matrices binaires ayant exactement deux 1 sur chaque ligne.
2. Exhiber toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ pour $n \in \{2, 3\}$ et déterminer les valeurs de u_2 et u_3.
   Dans le cas $n = 3$, on classera les solutions en fonction de la position du 0 dans la première ligne.

V - A la recherche d'une relation de récurrence pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Pour $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, on note
   $$\mathcal{H}_n^{(i,j)} = \text{l'ensemble des éléments de } \mathcal{U}_n \text{ ayant un 1 en position } (i, j).$$
   Par exemple, $\mathcal{H}_n^{(1,1)}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ (matrices binaires comportant exactement deux 1 par ligne et par colonne) ayant un 1 en position $(1, 1)$.
   Enfin h_n désigne le cardinal de $\mathcal{H}_n^{(1,1)}$: $h_n = \mathrm{card}(\mathcal{H}_n^{(1,1)})$.
   (a) Préciser les valeurs de h_2 et h_3.
   (b) Soit $p \in [\![1 ; n]\!]$ et $A \in \mathcal{H}_n^{(i,j)}$, dans quel ensemble $\mathcal{H}_n^{(?,?)}$ se trouve $\Phi_{i\leftrightarrow p}(A)$?
   (c) Montrer que $\Phi_{1\leftrightarrow i}(A)$ induit une bijection de $\mathcal{H}_n^{(i,j)}$ sur $\mathcal{H}_n^{(1,j)}$.
   On admet, de même que $\Psi_{1\leftrightarrow j}(A)$ induit une bijection de $\mathcal{H}_n^{(i,j)}$ sur $\mathcal{H}_n^{(i,1)}$.
   (d) En déduire que $\Psi_{1\leftrightarrow j} \circ \Phi_{1\leftrightarrow i}$ induit une bijection de $\mathcal{H}_n^{(i,j)}$ sur $\mathcal{H}_n^{(1,1)}$. Que peut-on en déduire sur les cardinaux des $\mathcal{H}_n^{(i,j)}$?
   (e) Préciser, en fonction de h_n, le nombre de matrices de $\mathcal{U}_n$ ayant un 1 en position (i, j) et en déduire que
   $$\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A = h_n \times J.$$
   (f) Soit $A \in \mathcal{U}_n$: simplifier AX_0 et en déduire
   $$u_n = \frac{n}{2}\, h_n \qquad (1).$$
2. Soit $\mathcal{K}_n^{(i,j)} = \mathcal{H}_n^{(1,1)} \cap \mathcal{H}_n^{(1,j)} \cap \mathcal{H}_n^{(i,1)}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{U}_n$ ayant un 1 en positions
   $$(1, 1), \quad (1, j) \quad \text{et} \quad (i, 1).$$
   Par exemple, $\mathcal{K}_n^{(2,2)} = \mathcal{H}_n^{(1,1)} \cap \mathcal{H}_n^{(1,2)} \cap \mathcal{H}_n^{(2,1)}$ désigne l'ensemble des matrices A de $\mathcal{U}_n$ (matrices binaires comportant deux 1 par ligne et par colonne) ayant un 1 en positions
   $$(1, 1), \quad (1, 2) \quad \text{et} \quad (2, 1).$$
   Enfin, on note k_n le cardinal de $\mathcal{K}_n^{(2,2)}$: $k_n = \mathrm{card}(\mathcal{K}_n^{(2,2)})$.

(a) Pour $(i,j) \in [\![2 ; n]\!]^2$, on désigne par $\varphi_{i,j}$ l'application qui à $A \in \mathcal{U}_n$ associe la matrice obtenue par échange des lignes 2 et i puis des colonnes 2 et j.
Justifier que $\varphi_{i,j}$ induit une bijection de $\mathcal{K}_n^{(i,j)}$ sur $\mathcal{K}_n^{(2,2)}$.
Que peut-on en déduire sur les cardinaux des $\mathcal{K}_n^{(i,j)}$?

(b) Justifier que, pour (i,j) et (p,q) deux couples distincts de $[\![2 ; n]\!]^2$, on a $\mathcal{K}_n^{(i,j)} \cap \mathcal{K}_n^{(p,q)} = \varnothing$.

(c) Etablir que $\mathcal{H}_n^{(1,1)} = \bigcup\limits_{(i,j)\in[\![2 ; n]\!]^2} \mathcal{K}_n^{(i,j)}$ puis en déduire que

$$h_n = (n-1)^2 \, k_n \qquad (2).$$

3. On suppose $n \geqslant 4$. On note $\mathcal{K}_{n,1}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{K}_n^{(2,2)}$ ayant un 1 en position $(2,2)$ et $\mathcal{K}_{n,0}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{K}_n^{(2,2)}$ ayant un 0 en position $(2,2)$.

   (a) Décrire simplement les deux premières lignes et colonnes d'un élément de $\mathcal{K}_{n,1}$.

   (b) Justifier que le cardinal de $\mathcal{K}_{n,1}$ vaut u_{n-2}.

   (c) Justifier que le cardinal de $\mathcal{K}_{n,0}$ vaut h_{n-1}.

   (d) En déduire que, pour $n \geqslant 4$,
$$k_n = u_{n-2} + h_{n-1}.$$

4. Pour $n \geqslant 4$, donner une relation de récurrence entre u_n, u_{n-1} et u_{n-2} uniquement.
On vérifie facilement que cette relation est également vraie si $n \geqslant 2$.

VI - La formule de Tan Zhonghua, Gao Shanzhen et Heinrich Niederhausen.

1. A l'aide de la question **II-2)**, montrer que $P_n(0)$ et $\dfrac{u_n}{n!}$ vérifient la même relation de récurrence.
2. En déduire, pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = \frac{(n!)^2}{4^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \binom{2n-2k}{n-k}.$$
3. Pour finir, justifier que
$$u_n = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, 2^k \, (2n-2k)!k! \binom{n}{k}^2$$
(résultat établi en 2006, à l'aide d'une approche combinatoire, par `Tan Zhonghua`, `Gao Shanzhen` et `Heinrich Niederhausen`).