

LES NOMBRES COMPLEXES

+

GEOMETRIE DANS LE PLAN :

« on s'appuie sur les notions précédemment acquises dans le secondaire » (programme officiel).

• **Repères dans le plan** : coordonnées cartésiennes d'un point, d'un vecteur. Cas des repères orthonormaux (R.O.N) et directs (R.O.N.D). Un R.O.N fixé, identification $\mathbb{R}^2 - \mathbb{C}$ - plan \mathcal{P} . Système de coordonnées polaires, repère polaire. Changement de R.O.N.D.

• **Produit scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, 0 sinon, où $(\vec{u}, \vec{v}) =$ angle **non orienté**.
Interprétation géométrique. Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Expression dans une base O.N : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Bilinéarité du produit scalaire. Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$. Rem : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Prop : (\vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** i.e $\vec{u} \perp \vec{v}$) \Leftrightarrow ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Rem : si $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est unitaire, alors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ est *directement orthogonal* à \vec{u} , par conséquent $(\vec{u}, \vec{v}) =$ B.O.N.D

• **Déterminant de deux vecteurs** : $Dét(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$ si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, 0 sinon, où $(\vec{u}, \vec{v}) =$ angle **orienté**. Antisymétrie : $Dét(\vec{u}, \vec{v}) = -Dét(\vec{v}, \vec{u})$.

Expression dans une base O.N.D : $Dét(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$. Rem : $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Bilinéarité du déterminant :

$Dét(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 Dét(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 Dét(\vec{u}_2, \vec{v})$ et $Dét(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 Dét(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 Dét(\vec{u}, \vec{v}_2)$

Interprétation géométrique : $|Dét(\vec{u}, \vec{v})| =$ aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Prop : (\vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires**) \Leftrightarrow ($Dét(\vec{u}, \vec{v}) = 0$) \Leftrightarrow $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0$, où les coordonnées peuvent être

prises ici (*exceptionnellement*) sur une base quelconque, pas forcément B.O.N.D.

Rem : si \vec{u} et \vec{v} sont d'affixes respectives a et b, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Re}(\bar{a} \times b)$ et $Dét(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Im}(\bar{a} \times b)$

D'où : ($\vec{u} \perp \vec{v}$) \Leftrightarrow ($\bar{a} \times b + a \times \bar{b} = 0$) et (\vec{u} colinéaire à \vec{v}) \Leftrightarrow ($\bar{a} \times b - a \times \bar{b} = 0$)

• **Droites** :

♥ dans un repère quelconque : représentation paramétrique, équation cartésienne (utilisation du déterminant) d'une droite donnée par un point et un vecteur directeur.

ATTENTION :

« $\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ » est une équation cartésienne de **droite** ssi a ou b est non nul, autrement dit **ssi** $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

♥ dans un R.O.N : si « $\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ » est une équation de D,

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un *vecteur directeur* de D, et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un *vecteur normal* de D.

Equation polaire : de la forme « $r = \frac{1}{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta} = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}$ » si $O \notin D$ (D d'équation « $\alpha x + \beta y = 1$ »),

et « $\theta = \alpha$ » si $O \in D$

Equation normale : de la forme « $\cos(\theta_0).x + \sin(\theta_0).y = p$ ».

L'équation polaire est alors $r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}$ (si $p \neq 0$). Rem : si $p \geq 0$, $p = d(O, D)$ (distance de O à la droite D).

• **Distance d'un point M à une droite D** = (A, \vec{u}) : $d(M, D) = \frac{|\text{Dét}(\vec{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

si « $ax + by + c = 0$ » est une équation de D (dans un R.O.N), \vec{n} vecteur normal et $M = (x_1, y_1)$ un point.

• **Application aux systèmes linéaires carrés 2x2** : soit (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On note $\text{Dét}(S) =$ le déterminant du système (S) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

1^{er} cas : si $\text{Dét}(S) = 0$, (S) admet soit aucune solution, soit une infinité (à déterminer par la résolution de (S)).

2^{ème} cas : si $\text{Dét}(S) \neq 0$: on dit que le système est de Cramer, et (S) admet une solution unique (x_0, y_0) donnée par les **formules de Cramer** :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\text{Dét}(S)} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\text{Dét}(S)}$$

• **Lignes de niveau** : de $f(M) = \vec{u} \cdot \vec{AM}$, $f(M) = \text{Dét}(\vec{u}, \vec{AM})$, A et \vec{u} unitaire fixés.

• **Cercles** : équation normale « $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ » (où $c = a^2 + b^2 - R^2$), centre $\Omega(a, b)$, rayon $R > 0$.

Caractérisation :

$$M \in (\text{cercle de diamètre } [AB]) \iff \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

Intersection d'un cercle et d'une droite (trois cas).

Intersection de deux cercles non concentriques (trois cas, en se ramenant au cas précédent).

• **Transformations du plan et C** : soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \mapsto f(M) = M'(z')$.

♥ **Rappels** :

si $z' = z + b$, ($b \in \mathbb{C}$) : f est la *translation* de vecteur d'affixe b

si $z' - \omega = k(z - \omega)$, ($k \in \mathbb{R}$) : f est l'*homothétie* de centre d'affixe ω , de rapport k .

si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ($\theta \in \mathbb{R}$) : f est la *rotation* de centre d'affixe ω et d'angle θ .

si $z' = \bar{z}$: f est la *symétrie orthogonale (réflexion)* par rapport à l'axe des abscisses.

♥ **similitude directe** : $z' = \alpha z + \beta$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ (donc avec α non nul).

Propriétés : une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Etude :

• si $\alpha = 1$: $f =$ translation.

• si $\alpha \neq 1$: f a un unique point fixe $\omega = f(\omega)$ (où $\omega = \frac{\beta}{1 - \alpha}$) et $z' - \omega = k \cdot e^{i\theta}(z - \omega)$ (où $\alpha = k \cdot e^{i\theta}$).

Dans ce cas, $f = r \circ h = h \circ r =$ composée *commutative* de la rotation r de centre ω , angle θ et de l'homothétie de centre ω et de rapport k .

Prévisions pour le n°3 : le précédent + les fonctions usuelles (exp-ln-puissance + fonctions hyperboliques et leurs réciproques). Les fonctions trigonométriques et réciproques seront vues plus tard.