PROGRAMME n° 12 - semaine du 14/12/2009 au 18/12/2009

CONIQUES + RELATION D'ORDRE
+
L'ENSEMBLE ℕ DES ENTIERS NATURELS

• Existence et propriétés de ℕ admises : ℕ est non vide, totalement ordonné, ℕ n'a pas de plus grand élément.

♥ toute partie *non vide* de ℕ possède un plus petit élément,

♥ toute partie *non vide* de ℕ et *majorée* possède un plus grand élément.

• Division euclidienne dans ℕ : pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ d'entiers naturels, (avec b non nul)
il existe un unique couple d'entiers (q , r) $\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbf{a = bq + r} \quad \underline{\textbf{ET}} \quad \mathbf{0 \le r < b}$$

(**q** = **le quotient** et **r** = **le reste** dans la division euclidienne de a par b, $\mathbf{0 \le r \le b-1}$).

Remarque : on a également une division euclidienne dans ℤ

♥ $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in\mathbb{Z}^*,\ \exists\,!\,(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ a = bq + r \text{ et } 0\le r < |b|$

• Principe de récurrence (démonstration par propriétés de ℕ). Récurrence simple, récurrence forte.

• Symboles $\sum$ et $\prod$: propriétés élémentaires. Quelques exemples.

En particulier, si I et J sont des parties **finies** de ℕ :

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda.b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\lambda.\sum_{i\in I}b_i \quad \underline{\text{et}} \quad \prod_{i\in I}(a_i.b_i^{\alpha})=\prod_{i\in I}a_i\times\left(\prod_{i\in I}b_i\right)^{\alpha}$$

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}x_{i,j}=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}x_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}x_{i,j}\right) \text{ et (cas particulier) :}$$

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}(a_i\times b_j)=\sum_{i\in I}\left(a_i\times\left(\sum_{j\in J}b_j\right)\right)=\left(\sum_{j\in J}b_j\right)\times\left(\sum_{i\in I}a_i\right)=\left(\sum_{i\in I}a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J}b_j\right)=\sum_{j\in J}\left(b_j\times\left(\sum_{i\in I}a_i\right)\right).$$

Remarques : $\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{m}c_k+\sum_{k=m+1}^{n}c_k$ et $\prod_{k=1}^{n}c_k=\prod_{k=1}^{m}c_k\times\prod_{k=m+1}^{n}c_k$ (si $1\le m<n$)

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k+\lambda)=\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\right)+n\times\lambda \quad \underline{\text{et}} \quad \prod_{k=1}^{n}(\lambda c_k)=\lambda^n\times\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right),\quad \sum_{j=n-d}^{j=m-d}c_{j+d}=\sum_{k=n}^{k=m}c_k \quad \underline{\text{et}} \quad \prod_{j=n-d}^{j=m-d}c_{j+d}=\prod_{k=n}^{k=m}c_k \quad \textit{(réindexation)}$$

Cas à retenir (CLASSIQUE !) *(télescopage)* : $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0$ ou encore $\boxed{\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k)=u_{q+1}-u_p}$.

L'ENSEMBLE ℝ DES REELS

• On admet l'existence du corps ℝ, l'ensemble des réels muni des deux lois de composition interne + et × (neutres 0 et 1), de la relation d'ordre total ≤ (rappel des propriétés usuelles reliant ≤, + et ×).

• ℝ a la propriété de la borne supérieure :

« **toute partie non vide et majorée de ℝ possède une borne supérieure** » (*admis*).

• Valeur absolue : définition $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\ge 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$. Rappels : $-|x| \le x \le |x|$, et $(-A \le x \le A) \Leftrightarrow (|x| \le A)$

Inégalités triangulaires : $\boxed{\big|\,|x|-|y|\,\big|\le|x\pm y|\le|x|+|y|}$, $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $|x-y| \le |x-z|+|z-y|$.

Remarque : dans l'inégalité triangulaire, on a l'égalité $|a+b| = |a|+|b|$ ssi a et b sont de même signe.

Remarque : $\boxed{\mathrm{Max}(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)}$ et $\boxed{\mathrm{Min}(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)}$.

Remarque : d(a,b) : = | a – b | définit une *distance* sur ℝ.

• Rappels sur majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure d'une partie A de ℝ.

Rem : **toute partie non vide et minorée de ℝ possède une borne inférieure**.

• Caractérisation de la borne supérieure S = sup(A) où A ⊂ ℝ :

« **S = sup(A)** » ⇔ « (S est un **majorant** de A et, pour **tout ε>0**, il **existe x∈A** tel que **S – ε < x ≤ S**) »

Idem : « **I = inf(A)** » ⇔ « (I est un **minorant** de A et, pour **tout ε>0**, il **existe x∈A** tel que **I ≤ x < I + ε**) »

• Définition de la partie entière d'un réel x : **E(x) = Max { n ∈ℤ | n ≤ x }.**

Caractérisation : $\boxed{(\,\mathbf{n} \text{ est un } \mathbf{entier}\ \text{ET}\ \mathbf{n \le x < n+1}\,) \Leftrightarrow (\,\mathbf{n = E(x)}\,)}$.

Remarque : si y est un réel, si m est un entier, si m ≤ y ALORS m ≤ E(y).

Prop : ∀x∈ℝ, **E(x) ≤ x < E(x) + 1** (i.e) **x – 1 < E(x) ≤ x** .

Pour tout **ENTIER N**∈ℤ : E(x + N) = E(x) + N.

Caractérisation : (p ∈ ℤ et p ≤ x < p + 1) ⇔ (p = E(x))

• Intervalles de ℝ : catalogue (segment, intervalle ouvert, intervalle fermé, intervalle ni ouvert, ni fermé, ℝ et ∅ sont ouverts et fermés). Notion de point intérieur/adhérent à un intervalle.

Définition de la droite (numérique) réelle achevée : $\overline{IR} := IR \cup \{-\infty, +\infty\}$.

• Déf : une partie A de ℝ est dite **convexe** si : « ∀x∈A, ∀y∈A, (x ≤ y) ⇒ [x , y] ⊂ A ».

Autrement dit : (A est **convexe**) ⇔ (∀x∈A, ∀y∈A, ∀λ∈[0,1], λ.x + (1 – λ).y ∈ A) .

Admis : les parties convexes de ℝ sont exactement les intervalles de ℝ *(attention : résultat **hors** programme).*

• Approximation décimale d'un réel : pour tout réel x, il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ de nombres décimaux (donc rationnels) telles que (pour tout n∈ℕ) $\mathbf{u_n \le x \le v_n}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante et pour tout n∈ℕ : $|x - u_n| \le 10^{-n}$ et $|x - v_n| \le 10^{-n}$ *(approximation de x par **défaut** et par **excès** à 10^{-n} près).*

Rem : $|v_n - u_n| \le 2.10^{-n}$, les suites (u_n) et (v_n) sont des *suites adjacentes* et $\lim(u_n) = \lim(v_n) = x$.

Conséquence : pour tout réel x, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x.

Par exemple : $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $v_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$ (ou bien $v_n = \frac{-E(-10^n x)}{10^n}$)

• « Densité » de ℚ et de ℝ\ℚ = 𝕀 dans ℝ : entre deux réels distincts (et donc dans tout intervalle de ℝ non vide et non réduit à un point), il existe un rationnel et un irrationnel (et donc une infinité).

Ceci peut se traduira par : tout intervalle]a,b[⊂ ℝ non vide rencontre ℚ et son complémentaire ℝ\ℚ = 𝕀.

Plus précisément : ∀a∈ℝ, ∀b∈ℝ ,

(a < b) ⇒ (∃r∈ℚ, a < r < b) et (a < b) ⇒ (∃i∈ℝ\ℚ, a < i < b)

Prévisions pour le n°13 : le précédent + les suites réelles (début : suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes doubles) + la structure de groupe.