PROGRAMME n° 15 - semaine du 18/01/2010 au 23/01/2010

LES SUITES REELLES : programme précédent + la suite...

• Suites adjacentes :

* Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites « **adjacentes** » si l'une croissante, l'autre décroissante et $\lim(u_n - v_n) = 0$.

* Propriété : si les deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** alors :

1) (u_n) et (v_n) sont **convergentes** **ET** 2) $\lim(u_n) = \lim(v_n) = L\in\mathbb{R}$

Application : *(théorème des segments emboîtés)* l'intersection d'une suite de segments emboîtés dont le diamètre tend vers 0 est un singleton. *(rappel : le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme)*

• Suite extraite : $v = (v_n)$ est une suite extraite *(sous-suite)* de la suite $u = (u_n)$ s'il existe une application *strictement croissante* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N} : v_n = u_{\varphi(n)}$ (rem : on a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$).

Cas courant : $\varphi(n) = a.n + b$ ($a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}$). Exemples : $p_n = u_{2n}$, $i_n = u_{2n+1}$, $c_n = u_{n^2}$, $s_n = u_{n+1}$, etc...

Prop : si $\lim(u_n) = L\in \overline{\mathbb{R}}$ existe alors pour toute suite extraite $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$, $\lim(v_n)$ existe et vaut L.

Conséquences :

♥ si une suite extraite de $u = (u_n)$ n'a pas de limite, alors (u_n) n'a pas de limite.

♥ si deux suites extraites de $u = (u_n)$ ont des limites distinctes, alors $\lim(u_n)$ n'existe pas.

Applications : ($(-1)^n$), $(\cos(\pi\sqrt{n}))$, ($(-2)^n$), $(u_n = \sin(n) = v_{n^2})$ donc $(v_n = \sin(\sqrt{n}))$ n'ont pas de limite.

Une réciproque :

« **si** $(p_n = u_{2n})$ et $(i_n = u_{2n+1})$ convergent toutes deux vers la même limite L, **alors** (u_n) converge et $\lim(u_n) = L$ »

Application: $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ est une suite convergente, car (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites adjacentes, donc etc...

• Exemples d'étude de suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ » avec $f : I \to \mathbb{R}$. Etude graphique.

Remarques : soit $I\subset\mathbb{R}$, avec « **I stable par f** » (i.e) « $f(I) \subset I$ » (i.e) « $\forall x\in\mathbb{R} : x\in I \Rightarrow f(x)\in I$ ». Alors :

1) Si $u_0\in I$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n\in I$.

2) Si la *fonction* f est *croissante* sur I, alors la *suite* (u_n) est *monotone* (croissante ou décroissante).

3) Si $\forall x\in I, x \leq f(x)$, alors la suite (u_n) **est croisssante**.
Si $\forall x\in I, f(x) \leq x$, alors la suite (u_n) **est décroissante**.

4) Si (u_n) converge vers $L\in I$ et **f** est **continue** sur I, alors $L = f(L)$ (i.e) L est un **point fixe** de f.

5) Si f est décroissante sur I, alors fof est croissante sur I : or, I est stable par f, donc par fof, et les deux suites extraites $(p_n = u_{2n})$ et $(i_n = u_{2n+1})$ vérifient $p_{n+1} = \text{fof}(p_n)$ et $i_{n+1} = \text{fof}(i_n)$. Elles sont donc monotones.
Si elles sont toutes deux bornées, alors (si f, et donc fof , est continue sur I) elles convergent vers des points fixes α et β de fof. Si, en plus, on a $\alpha = \beta$, alors on peut en déduire que $u = (u_n)$ converge vers $L = \alpha = \beta$.
Si $\alpha \neq \beta$, la suite $u = (u_n)$ diverge sans limite.

• Convergence d'une suite complexe (notions) : soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, une suite à valeurs complexes.

On dit que la **suite complexe (u_n) converge vers le nombre complexe L** si $\lim(|u_n - L|) = 0$.

On dit que (u_n) **converge** s'il existe $L\in\mathbb{C}$ tel que (u_n) converge vers L : autrement dit , si
$(\exists L\in\mathbb{C}, \forall\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N} : (n \geq N_0 \Rightarrow | u_n - L | \leq \varepsilon)$. On a toujours l'unicité de la limite L.

En notant $u_n = x_n + i\, y_n$ et $L = L_1 + i.L_2$ (où x_n, y_n, L_1 et L_2 sont réels), on a :

((u_n) CV) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Re}(u_n)$ CV et $\mathrm{Im}(u_n)$ CV) et ($\lim(u_n) = L$) $\Leftrightarrow$ ($\lim(x_n) = L_1$ et $\lim(y_n) = L_2$)

Résultats maintenus :

1) Toute suite complexe convergente est bornée ((i.e) ($|u_n|$) est majorée).

2) Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0 est une suite convergente vers 0.

Attention ! : (u_n) croissante, $\lim(u_n) = \infty$, (u_n) majorée, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone ...N'ONT PAS DE SENS pour les suites à valeurs complexes (pas d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec + et ×) ! ! !

Attention : (u_n CV $\Rightarrow$ $|u_n|$ CV) (mais réciproque fausse).

Attention : pas de lien, a priori, entre ($u_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ CV) et (θ_n CV), **sauf** (ρ_n CV et θ_n CV) $\Rightarrow$ (u_n CV).

Prévisions pour le n°16 : espaces vectoriels (début).