PROGRAMME n° 20 - semaine du 08/03/2010 au 13/03/2010

LIMITE-CONTINUITE - PROPRIETES GLOBALES DES FONCTIONS CONTINUES + LES POLYNÔMES

• *L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*

∗ Déf : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k\geq 0} a_k X^k = \sum_{k} a_k X^k$ = est un polynôme, de coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, où la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ est supposée stationnaire nulle (i.e nulle à partir d'un certain rang).
Notation : X = l'indéterminée, identifiée à la suite (0,1,0,0,0,........).

∗ On note $\mathbb{K}[X]$ = l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}[X]$ peut s'identifier à l'ensemble des suites stationnaires nulles, à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est trivialement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Ex : le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ peut s'identifier à la suite $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0,0,0,\ldots\ldots)$.

∗ Pour tout $P = \sum a_k X^k$, $Q = \sum b_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$P+Q := \sum (a_k + b_k) X^k \qquad \text{et} \qquad \lambda.P := \sum (\lambda a_k) X^k$$

$$P \times Q = \sum c_k X^k \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j .$$

Prop : ($\mathbb{K}[X]$, +, .) est un $\mathbb{K}$–ev de vecteur nul $0 = \sum 0X^k$ *(le polynôme nul)*
($\mathbb{K}[X]$, +, ×) un anneau commutatif de neutre $1 = 1 + \sum_{k\geq 1} 0X^k$ *(le polynôme constant égal à 1)*

∗ Degré : si $P = \sum a_k X^k \neq 0$, **deg(P) = Max{ $i \in \mathbb{N}$ | $a_i \neq 0$ }**, et deg(0) = – ∞ (convention).
Pptés : **deg(λ.P + μ.Q) ≤ Max (deg(P) , deg(Q))** et **deg(P×Q) = deg(P) + deg(Q)**

∗ P est **unitaire** (ou normalisé) si P≠0 et si son coefficient dominant $a_{\deg(P)}$ est 1.
∀P∈$\mathbb{K}[X]$, P≠0 : il existe un unique λ∈$\mathbb{K}$* tel que P = λ P_0 avec P_0 unitaire.

• *L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$*

$\mathbb{K}_n[X]$ = { P∈$\mathbb{K}[X]$ | deg(P)≤ n } = vect $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est un $\mathbb{K}$-ev *(de dimension n+1 : pour plus tard !).*
Rem : $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev, mais pas un sous–anneau de $\mathbb{K}[X]$ (non stabilité par ×) (sauf si n = 0...).

• *Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$*

∗ A, B ∈$\mathbb{K}[X]$: on dit que **A divise B** (« A | B ») s'il existe C∈$\mathbb{K}[X]$ tel que B = A×C.
Rem : les seuls éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls P = λ∈$\mathbb{K}$*.

∗ $\mathbb{K}[X]$ est un anneau **intègre** : (P×Q = 0) ⇒ (P = 0 ou Q = 0) .
Conséquence : tout élément non nul est **régulier** dans $\mathbb{K}[X]$, (i.e) si P ≠ 0, alors (P×Q = P×R) ⇒ (Q = R)

∗ Si P≠ 0 et Q ≠ 0 : (P | Q et Q | P) ⇒ (P et Q sont **associés** i.e ∃λ∈$\mathbb{K}$*, P = λ.Q).

∗ Division euclidienne : pour tout A, B∈$\mathbb{K}[X]$, B≠0, il **existe** un **unique** couple (Q,R)∈$\mathbb{K}[X]$ tel que :

A = B×Q + R ET **deg(R) < deg(B)** *(Q = le quotient, R = le reste)*

• *Fonction polynômiale*

A tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction Φ(P) = $\widetilde{P} \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = \mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ définie par :

∀x∈$\mathbb{K}$, $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Φ est application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$. On notera de la même façon P et sa fonction polynômiale associé $\widetilde{P}$ *(rappel : ainsi, ∀t∈$\mathbb{K}$, $X^k(t) = t^k$ et X^k = une fonction).*

• *Racine d'un polynôme*

Déf : a∈$\mathbb{K}$ est une **racine** de P∈$\mathbb{K}[X]$ si $\widetilde{P}$ (a) = 0 (i.e) P(a) = 0.
Lemme : le reste dans la division de P par X – b est P(b).
Prop : (a est une racine de P) ⇔ ((X – a) divise P)

∗ Si deg(P) = n∈ℕ, alors P possède au plus n racines distinctes.

<u>IMPORTANT</u> : <u>si</u> deg(P) ≤ n et <u>si</u> P possède au moins n+1 racines <u>alors</u> P = 0 (constant nul).

<u>Conséquence</u> : Φ est injective et induit un isomorphisme de 𝕂[X] vers Im(Φ).

∗ <u>Si a est une racine de P≠0 et un entier m ≥ 1</u> :

♥ a est une racine de P d'**ordre de multiplicité supérieur à k** <u>si</u> $(X-a)^k$ divise P

<u>Autrement dit</u> : (a est racine de P d'ordre supérieur à **k**) ⇔ (∃Q∈𝕂[X] , $P = (X-a)^k Q$)

♥ a est une racine de P d'**ordre de multiplicité m** <u>si</u> $(X-a)^m$ divise P <u>et</u> $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.

<u>Autrement dit</u> : (a est racine de P d'ordre **m**) ⇔ (∃Q∈𝕂[X] , $P = (X-a)^m Q$ <u>et</u> $Q(a) \neq 0$)

<u>Rem</u> : si on étend ces définitions à la valeur m = 0, a est une racine de P d'ordre 0 signifie que a n'est pas racine de P.

• *<u>Relations racines-coefficients</u>*

∗ <u>Déf</u> : P∈𝕂[X] est dit **scindé** si son deg(P) ≥ 1 est exactement égal au nombre de ses racines comptées avec leur multiplicité.

(i.e) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ s'écrit $P = a_n \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $a_n \in \mathbb{K}^*$ et $m_1 + m_2 + ... + m_r = \deg(P) = n$.

∗ Si P est **scindé** et **<u>unitaire</u>** (avec deg(P) ≥ 1) : $\boxed{P = \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0}$, alors

$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -a_{n-1}}$ et $\boxed{\alpha_1 \times \alpha_2 \times ... \times \alpha_n = (-1)^n a_0}$. Cas n = 2, n = 3.

<u>Cas où P est non-unitaire</u> : $\boxed{P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)}$ alors $\boxed{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$ et $\boxed{\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$.

• *<u>Factorisation dans 𝕂[X]</u>*

∗ <u>Théorème de d'Alembert Gauss</u> *(admis !)* :

« **tout polynôme non constant de ℂ[X] possède au moins une racine dans ℂ** ».

<u>Conséquence</u> : tout polynôme de ℂ[X] est scindé *(faux dans ℝ[X])* .

∗ P∈𝕂[X] est **irréductible** si deg(P)≥1 et (P = A×B ⇒ A∈𝕂* ou B∈𝕂*)

(i.e les seuls diviseurs de P sont ses associés et les polynômes constants non nuls)

∗ Les polynômes **irréductibles de ℂ[X]** sont exactement les polynômes de degré 1.

∗ Les polynômes **irréductibles de ℝ [X]** sont :

1) ceux de degré 1

2) ceux de degré 2 à discriminant < 0 *(i.e à racines complexes non réelles conjuguées)*

∗ Tout polynôme de 𝕂[X] admet une « unique » décomposition en produit de polynômes irréductibles de 𝕂[X] *(admis)*. Exemples.

• *<u>Dérivation dans 𝕂[X</u>*

∗ Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le polynôme dérivé de P est P' = D(P) = $\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

L'application D est un endomorphisme de 𝕂[X] : D(λ.P+μ.Q) = λ.D(P)+μ.D(Q) .

∗ ∀P, Q∈𝕂[X] : D(P×Q) = P×D(Q) + D(P)×Q (*admis*)

On note $P^{(0)} = P$ et si k ≥ 1 : $P^{(k)} = D^k(P)$ = DoDo...oD(P) .

<u>Rem</u> : si 0 ≤ k ≤ n, $\boxed{\left(X^n\right)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}}$. Si k > n, $\left(X^n\right)^{(k)} = 0$. D'où (k > deg(P)) ⇒ ($P^{(k)} = 0$).

∗ <u>Formule de Leibniz</u> *(admise)*: $\boxed{(P\times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}}$ (i.e) $D^n(P\times Q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . D^k(P) \times D^{n-k}(Q)$.

• *<u>Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine</u>* : P∈𝕂[X], a∈𝕂, m∈ℕ*.

« a est une <u>racine de P d'ordre m</u> » ⇔ « $P(a) = P^{(1)}(a) = P^{(2)}(a) = ... = P^{(m-1)}(a) = 0$ **<u>et</u>** $P^{(m)}(a) \neq 0$ »

<u>Prévisions pour le n° 21 : la dérivation des fonctions f : ℝ→ℝ.</u>