QUESTIONS DE COURS

Développements limités

- Unicité (des coefficients) du développement limité d'une fonction au voisinage de 0.
- Etablir le développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0 :
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6.\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
- Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et le $\mathrm{DL}_3(1)$ de $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Etude locale (tangente) des courbes représentatives de ces fonctions, au voisinage de 0 et de 1 (respectivement).

Courbes paramétrées planes

- Si $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction vectorielle dérivable et qui ne n'annule pas sur l'intervalle I, alors la dérivée de $||\vec{f}||$ sur I est $\dfrac{\vec{f}.\vec{f}'}{||\vec{f}||}$.
- Déterminer la nature de la branche infinie de l'arc $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{e^t - 1} \end{cases}$.
On trouve, à l'aide d'équivalents et de développements limités :
$\displaystyle\lim_{t\to 0^\pm} x(t) = \lim_{t\to 0^\pm} y(t) = \pm\infty$ puis $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)} = 1$ puis $\displaystyle\lim_{t\to 0}(y(t) - x(t)) = -\frac{1}{2}$.
L'arc admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.
De plus, par DL(0) : $y(t) - \left(x(t) - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{t^3}{6} + \circ(t^3)}{2t^2 + \circ(t^2)}$,
d'où $\left[y(t) - \left(x(t) - \dfrac{1}{2}\right)\right] \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{12}t$, d'où la position locale de la trajectoire par rapport à son asymptote (interprétation graphique, à représenter).