QUESTIONS DE COURS

Les espaces et sous-espaces vectoriels

- L'ensemble $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour tout entier $n \geq 2$, l'intersection de n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est aussi un sous-espace vectoriel de E.
- <u>En exercice</u> : si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E, alors on a l'équivalence suivante :

$$(A \cup B \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

Sous-espaces engendrés - somme et somme directe de sev - sev supplémentaires

- Si A est une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E, alors on a l'équivalence

$$(A \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow (A = \text{vect}(A)).$$

- Si F et G sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev E, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

  (1) la somme $F + G$ est directe (i.e) $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

  (2) Pour tout $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$: si $\vec{f} + \vec{g} = \vec{0}_E$, alors $\vec{f} = \vec{g} = \vec{0}_E$.

  (3) Pour tout $\vec{x} \in F + G$: il existe un **unique** $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$.

- Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de E, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de E. Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.