QUESTIONS DE COURS

Les applications linéaires entre espaces vectoriels

- Si f est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors
  - son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - son image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

- Exercice : si u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent i.e $u \circ v = v \circ u$, alors les noyau et image de v, $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$, sont stables par u.

- Exercice : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E, F et G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors on a l'équivalence :
$$(\ v \circ u = 0 \ ) \Leftrightarrow (\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \ ).$$

Limite et continuité des fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Si f et g sont deux fonctions majorées sur l'intervalle I, alors $f + g$ est aussi majorée sur I, et on a $\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$.
  Il n'y a pas égalité dans le cas général (contre-exemple : $f = \sin$, $g = \cos$).

- L'ensemble $\mathcal{L}ip(I)$ des fonctions lipschitziennes sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Exercice : si $f : [a, b] \to [a, b]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[a, b]$. Autrement dit, $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = c$.