

---



---

Semaine n°3 du 02 octobre au 07 octobre 2023

---



---

Les nombres complexes (1<sup>ère</sup> partie)

- Parties réelle, imaginaire. Conjugaison. Module. Opérations sur les nombres complexes, propriétés. Inégalités triangulaires, cas d'égalité. Affixe d'un point, d'un vecteur. Cercle, disque.
- Rappel : calcul de  $\sum_{k=0}^n q^k$ , formule du binôme.
- Cercle trigonométrique  $\mathbb{U}$ . Rappels sur les fonctions cos, sin. Définition de la fonction tan. Formulaire usuel. Factorisation de  $1 \pm e^{i\theta}$ . Formule d'Euler, de Moivre. Application à la linéarisation. Argument d'un nombre complexe. Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ . Transformation  $a \cos(x) + b \sin(x) = A \cos(x - \varphi)$ .
- Exponentielle d'un nombre complexe. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) \neq 0$ . L'application
 
$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z = x + iy & \longmapsto & \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \end{cases}$$
 est **surjective**, mais **pas injective**.  
 $(\exp(z) = 1) \Leftrightarrow (z \in 2i\pi\mathbb{Z} \text{ i.e } \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi)$  et  $(\exp(z) = \exp(z')) \Leftrightarrow (z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z})$ .

Les nombres complexes (2<sup>nde</sup> partie)

- Racines carrées d'un nombre complexe non nul. Résolution des équations du second degré. Somme et produit des racines.
- Racines  $n$ -ièmes de l'unité. Ensemble  $\mathbb{U}_n$ . Résolution de  $z^n = a \in \mathbb{C}^*$  avec  $a$  sous forme trigonométrique.
- Factorisation d'un polynôme  $P$  par  $P(z) = (z - a)Q(z)$  avec  $Q$  polynôme lorsque  $a$  est une racine de  $P$  (i.e  $P(a) = 0$ ).
- Traduction de l'alignement/orthogonalité au moyen d'affixes.  
Transformations  $z \rightarrow e^{i\theta}z$ ,  $z \rightarrow z + b$ ,  $z \rightarrow kz$ ,  $z \rightarrow \bar{z}$ .

## Exercices

**Exercice 1** Si  $|z| \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$ .

**Exercice 2** Montrer que la suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  est bornée, avec

$$u_n = \sum_{k=0}^n \cos(k) = 1 + \cos(1) + \cos(2) + \dots + \cos(n).$$

**Exercice 3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calcul de la somme et du produit des  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Exercice 4** Soit un entier  $n \geq 2$ .

1. Déterminer toutes les racines du polynôme  $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ .

2. Justifier  $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = n$ . En déduire l'égalité  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .