

---



---

Semaine n°5 du 16 au 21 octobre 2023

---



---

Généralités sur les fonctions  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Calculs dans  $\mathbb{R}$ , manipulation d'égalités, d'inégalités. Valeur absolue d'un réel.
- Propriétés usuelles des fonctions : parité, périodicité, monotonie, majorée, minorée, bornée.
- Théorème de la bijection pour une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
- Dérivation : rappels. Equation d'une tangente. Fonctions de classe  $C^1$ . Dérivée de la réciproque d'une bijection. Inégalité des Accroissements Finis, application à l'étude de suites contractantes.

## Les fonctions usuelles

- Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances : définitions, propriétés, limites, croisances comparées. Calcul de  $\frac{d(u(x)^{v(x)})}{dx}$ .
- Fonctions hyperboliques : ch et sh. Propriétés, graphes, dérivées. Relations  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ ,  $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ ,  $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ . Limites :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sh}(x)}{x} \right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$ .

## Exercices

**Exercice 1** Si  $x \in ]-1, +1[$  et  $y \in ]-1, +1[$  alors  $z = \frac{x+y}{1+xy} \in ]-1, +1[$ .

**Exercice 2** Résoudre  $x - 1 = \sqrt{x+2}$ .

**Exercice 3** Résoudre  $x - 3 \geq \sqrt{x^2 - 2x}$ .

**Exercice 4** Soit  $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$  : montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[\frac{\pi}{2}, \pi[$  vers un intervalle  $J$  à préciser. Montrer que la réciproque  $g = f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $g'(t)$  pour tout  $t \in ]1, +\infty[$ .

**Exercice 5** Montrer que l'équation  $e^{-x/2} = x$  possède une unique solution, notée  $\ell$ , avec  $\ell \in [0, 1]$ . Soit la suite  $u$ , définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = e^{-u_n/2} = f(u_n)$  : montrer que  $u_n \in [0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que  $f$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $[0, 1]$ , que  $|u_n - \ell| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \ell|$  et  $u$  converge vers  $\ell$ . Indiquer un procédé permettant d'obtenir une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-3}$  près.

**Exercice 6** Ensemble de définition et limites aux bords de la fonction  $f : x \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

**Exercice 7** Soit  $f : x \mapsto f(x) = x^x$  : variations, limites aux bords et tracé précis de la courbe représentative.

**Exercice 8** Ensemble de définition, parité et dérivée de  $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

**Exercice 9** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  $(y = \text{sh}(x)) \Leftrightarrow (x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}))$ .

**Exercice 10** Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , montrer une des deux égalités (au choix) :  
 $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$  et  $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ .