
Semaine n°6 du 06 au 10 novembre 2023

Les fonctions usuelles

- Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances : définitions, propriétés, limites, croissances comparées. Calcul de $\frac{d(u(x)^{v(x)})}{dx}$.
- Fonctions hyperboliques : ch et sh. Propriétés, graphes, dérivées. Relations $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$, $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$. Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$.

Les fonctions trigonométriques réciproques.

- Rappels sur les fonctions trigonométriques. Inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$.
- Définition des fonctions Arcsin, Arccos, Arctan. Représentations graphiques, propriétés, dérivées. Relation $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, +1]$.
- Application : détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Brèves notions de dérivées et d'intégrales de fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Exercices

Exercice 1 Ensemble de définition et limites aux bords de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto f(x) = x^x$: variations, limites aux bords et tracé précis de la courbe représentative.

Exercice 3 Ensemble de définition, parité et dérivée de $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Exercice 4 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(y = \text{sh}(x)) \Leftrightarrow (x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}))$.

Exercice 5 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer une des deux égalités (au choix) :
 $\text{sh}(a + b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$ et $\text{ch}(a + b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.

Exercice 6 Résoudre : $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arccos}(x)$.

Exercice 7 Montrer que, pour tout $x \in [-1, +1]$:
 $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 8 Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 9 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
 $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = (\text{signe de } x) \times \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 Etude et représentation graphique de $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$.