

Semaine n°7 du 13 au 18 novembre 2023

Les fonctions trigonométriques réciproques.

- Rappels sur les fonctions trigonométriques. Inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
Limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$.
- Définition des fonctions Arcsin, Arccos, Arctan. Représentations graphiques, propriétés, dérivées. Relation $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, +1]$.
- Application : détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Brèves notions de dérivées et d'intégrales de fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Intégrales et primitives : calculs

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.
Condition suffisante d'existence de $\int_a^b f(t)dt$:
« si f est **définie** et **continue** sur le **segment** $[a, b]$ ou $[b, a]$. »
- Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 .
- Changement de variables.
- Primitives des fonctions usuelles, primitives de dérivées de fonctions composées, primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}, x \mapsto e^{ax}, x \mapsto \cos(bx)e^{ax}, x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$.
Notions de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.
- Exemples de calculs d'intégrales et de primitives.

Exercices

- Exercice 1** Résoudre : $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arccos}(x)$.
- Exercice 2** Montrer que, pour tout $x \in [-1, +1]$: $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Exercice 3** Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
- Exercice 4** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = (\text{signe de } x) \times \frac{\pi}{2}$$
- Exercice 5** Etude et représentation graphique de $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$.
- Exercice 6** Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$. Calcul de I_0, I_1 . Montrer : pour tout $n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.
En déduire que la suite $(u_n = (n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.
- Exercice 7** Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(t)$.
- Exercice 8** Ensemble de définition, dérivabilité et dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{1+t} dt$.