
Semaine n°11 du 11 au 16 décembre 2024

Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

- Résolution des équations différentielles de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions continues sur I , intervalle de \mathbb{R} , à valeurs réelles (ou complexes). Cas où a est constante.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière de (« $y' + a(x)y = b(x)$ ») et de la solution générale de l'équation homogène (« $y' + a(x)y = 0$ »).
- Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (EDL₁ avec condition initiale $y(x_0) = \alpha$).

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre

- Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$, où a, b scalaires et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Résolution de l'équation homogène associée : $y'' + ay' + by = 0$.
- Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si a et b réels : description des solutions (à valeurs) réelles.
Cas particulier ($a = 0$) : $y''(x) + by(x) = 0$.
- Principe de superposition.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (avec la **condition initiale** : $y(\mathbf{x}_0) = \alpha$ et $y'(\mathbf{x}_0) = \beta$).
- Trouver une solution particulière quand le second membre est de la forme :
 $f(x) = Ae^{\lambda x}$ (avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$), $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ (avec $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$).

Exercices

Exercice 1 Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, fonction continue. Montrer que l'ensemble \mathcal{S}_H des solutions de l'équation homogène « $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ » est stable par combinaison linéaire.

Exercice 2 Les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, **dérivables** sur \mathbb{R} et vérifiant

$$\ll \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, g(s+t) = g(s) \times g(t) \gg$$

sont exactement (où a est une constante dans \mathbb{C}) :

la fonction constante nulle $\tilde{0}$ et les fonctions du type $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x t f(t) dt = x^2.$$

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle (E) : « $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ » sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à l'aide du changement de variable $z(t) = y(e^t)$ i.e $y(x) = z(\ln x)$.

Exercice 5 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables une fois sur \mathbb{R} et vérifiant la condition : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.