Semaine n°15 du 22 au 27 janvier 2024

Ensembles usuels de nombres - Les réels

- Calculs dans $\mathbb{R}$ (révisions) - voir programme n°4.
- Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels.
- Relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum. Borne supérieure (inférieure) d'une partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$. Si A n'et pas majorée, on note $\sup(A) = +\infty$.
- Partie entière. Approximations décimales d'un réel (par excès, par défaut).
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Caractérisation (admise) par convexité.

Les suites «classiques»

- Définition d'une suite : explicite, implicite, par récurrence.
- Monotonie d'une suite. Suite majorée, minorée, bornée. Suite périodique, suite stationnaire.
- Suites arithmétiques, suites géométriques : définition, expression, somme de termes consécutifs. Suites arithmético-géométriques. Suites linéaires récurrentes d'ordre deux, expression.

Suites réelles - convergence - divergence ($1^{\text{ère}}$ partie)

- Limite finie, limite infinie d'une suite réelle. Convergence, divergence. Unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limites (par encadrement, majoration, minoration, limite monotone, suites adjacentes).

Exercices

Exercice 1 Soit A, partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Si A possède un maximum, alors celui-ci est unique.

Exercice 2 Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ (trois méthodes, au choix).

Exercice 3 Soit x, un réel et la suite u définie par $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$: cette suite converge vers x.

Exercice 4 Soit A et B, deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit un nouvel ensemble

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $\sup(A)$, $\sup(B)$ et $\sup(A+B)$ existent puis $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5 Déterminer une expression du terme général de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 4.$$

Montrer qu'il existe des constantes réelles α, β, θ et φ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\beta^n \cos(n\theta + \varphi)$.

Exercice 6 Déterminer la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$4u_{n+2} - 8u_{n+1} + 3u_n = 0 \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(S_n)$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 7 Déterminer une expression du terme général de la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^9} \quad \text{avec} \quad u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 8 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \text{dét}(M)$ où la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$m_{ij} = 2 \text{ si } j = i+1,\ m_{ij} = 1 \text{ si } j = i-1,\ m_{ij} = 3 \text{ si } i = j \text{ et } m_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$. En déduire Δ_n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 9 On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.
Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans limite.

Exercice 10 $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 11 $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

Exercice 12 Vérifier, pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $\left(u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.