

Semaine n°19 du 19 au 24 février 2024

Dérivation

- Dérivabilité, nombre dérivé. Liens avec la continuité, l'existence d'un développement limité d'ordre un. Dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque).
- Extremum local : condition nécessaire si dérivabilité. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.
- Théorème de la limite de la dérivée :

« si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ».

Conséquence :

« si f est C^0 sur I , C^1 sur $I \setminus \{a\}$, si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$ (finie) alors f est C^1 sur I et $f'(a) = \ell$ ».

- Fonctions de classe C^k , C^∞ . Opérations. Formule de Leibniz (dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions D^n ou C^n). Brève extension aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Fonctions convexes : position du graphe par rapport à une sécante ou à une tangente (si dérivable). Caractérisation des fonctions f convexes deux fois dérivables (par $f'' \geq 0$).

Les entiers naturels

- Multiples et diviseurs d'un entier naturel. Théorème de la division euclidienne dans \mathbb{N} .
- Notions de PGCD-PPCM de deux entiers naturels.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers.

Ensembles-Dénombrement

- Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (parties) d'un ensemble. Intersection, réunion, complémentaire. Propriétés. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E .
- Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E . Lien avec intersection, réunion, complémentaire.
- Rappels sur injection, surjection, bijection.
- Cardinal d'un ensemble fini. Caractérisations de la bijectivité d'une application entre deux ensembles de même cardinal. Opérations sur les cardinaux. Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B . Notation $\mathcal{F}(A, B) = B^A$. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini. Le cardinal de E^p est $\text{card}(E)^p$ (= nombre de p -listes de E).
- Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (p -arrangements) ($A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, 0 sinon). Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis. Nombre de permutations (bijections de E vers E) d'un ensemble fini E ($n!$ si $\text{card}(E) = n$).
- Nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n (p -combinaisons) ($\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ si $0 \leq p \leq n$, 0 sinon). Rappels des propriétés des coefficients binomiaux. Formule du binôme.

Exercices

Exercice 1 Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ et $|1 - \cos(x)| \leq |x|$.

Exercice 2 Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\text{sh}(x) > x$.

Exercice 3 Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$. Dédurre : $\left(H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \rightarrow +\infty} \sim \ln(n)$.

Exercice 4 Montrer que la fonction \cos possède un unique point fixe α sur \mathbb{R} : justifier $\alpha \in [0, 1]$. On définit la suite u par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite u converge vers α .

Exercice 5 Calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f avec $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-3x}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\text{sh}(x)}$. Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0. Montrer que, ainsi prolongée, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 7 Montrer : pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.

Exercice 8 Preuve de l'**existence** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans \mathbb{N} .

Exercice 9 Preuve de l'**unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne dans \mathbb{N} .

Exercice 10 Soit a et b , des entiers vérifiant $0 \leq b < a$.

Comparer les restes et les quotients des divisions euclidiennes de a et b par $a - b$.

Exercice 11 Pour n et p dans \mathbb{N} , on pose $u_{n,p} = \frac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$.

- Vérifier $u_{n+1,p} + u_{n,p+1} = 4u_{n,p}$: en déduire que $u_{n,p}$ est un entier pour tout n et pour tout p dans \mathbb{N} (indication : on pourra raisonner par récurrence sur n en étudiant la proposition $H(n)$: «pour tout entier $p \geq 0$, $u_{n,p}$ est un entier»).
- En déduire que $\binom{n+p}{n}$ divise $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p}$.

Exercice 12 Sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E non vide, on définit la différence symétrique de deux ensembles A et B par : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Vérifier : $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
- Exprimer la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{A \triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
- Prouver, pour A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Exercice 13 Soit E , un ensemble de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$.

Exercice 14 Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, avec $n \geq 3$ (trois méthodes, au choix) ?

Exercice 15 Quel est le nombre d'anagrammes du mot «galois» ? Du mot «lipschitzienne» ?